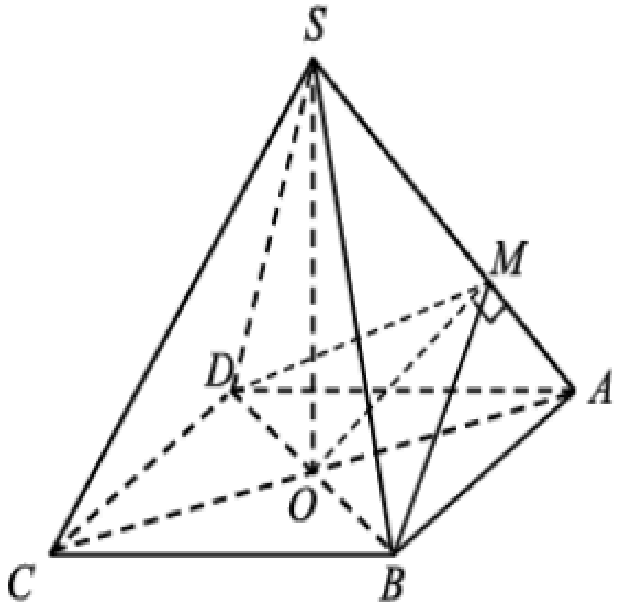
У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ з точки O, яка є основою висоти SO, до бічного ребра SA проведено перпендикуляр OM довжиною $3\sqrt{6}$. Двогранний кут при бічному ребрі піраміди дорівнює $120°$.

1. Доведіть, що пряма SA перпендикулярна до площини BMD.
2. Знайдіть об'єм піраміди $SABCD$.

ПЗНО_2016

1) Нехай $SABCD$ – задана правильна чотирикутна піраміда, квадрат $ABCD$ – основа піраміди, SO – висота піраміди (див. рисунок).



Оскільки піраміда $SABCD$ є правильною, то точка O є точкою перетину діагоналей квадрата $ABCD$. Відрізок OA є проекцією ребра SA на площину основи піраміди. Оскільки діагоналі квадрата перпендикулярні, то $OA \perp BD$. За теоремою про три перпендикуляри $SA \perp BD$. Окрім цього, за умовою $SA \perp OM$. Тоді за ознакою перпендикулярності прямої і площини $SA \perp BMD$, що й треба було довести.

2) Оскільки $SA \perp BMD$ і BM та DM лежать в площині BMD, то $BM \perp SA$ і $DM \perp SA$. Тому $\angle BMD$ є лінійним кутом двогранного кута з ребром SA. За умовою $\angle BMD = 120°$.

У правильній піраміді всі бічні грані рівні, тому $BM = DM$ (як відповідні відрізки в рівних трикутниках). Тоді в рівнобедреному трикутнику DMB медіана MO є одночасно і висотою, і бісектрисою. Отже, $MO \perp BD$ і $\angle BMO = 60°$.

З прямокутного трикутника BMO: $BO = MO \operatorname{tg} 60° = 3\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = 9\sqrt{2}$. Тоді $AO = BO = 9\sqrt{2}$.

З прямокутного трикутника AMO:

$$AM = \sqrt{AO^2 - OM^2} = \sqrt{\left(9\sqrt{2}\right)^2 - \left(3\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{9^2 \cdot 2 - 9 \cdot 6} = 3\sqrt{12} = 6\sqrt{3}.$$

Прямокутні трикутники SOA і OMA подібні (за двома кутами). Тому

$\frac{SO}{OM} = \frac{AO}{AM}$, тоді $SO = \frac{OM \cdot AO}{AM} = \frac{3\sqrt{6} \cdot 9\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} \cdot 9\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = 9$.

Обчислюємо площу основи піраміди: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD^2 = \frac{1}{2}\left(18\sqrt{2}\right)^2 = 18^2 = 324$.

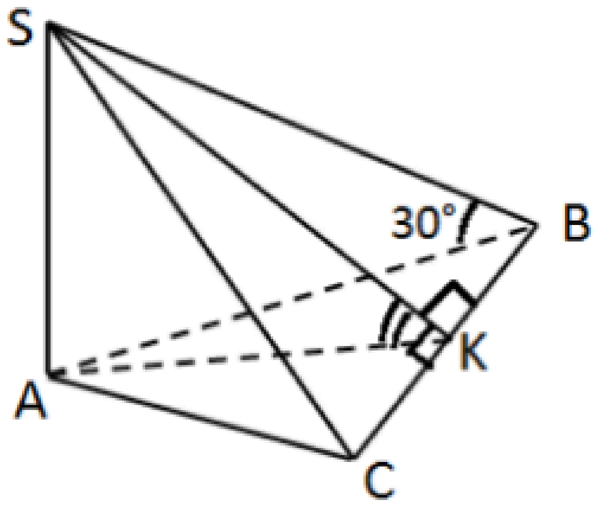
Тоді об'єм піраміди $V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 324 \cdot 9 = 972$.

Відповідь: 2) 972.

Завдання 32 з 33

Основою піраміди $SABC$ є гострокутний рівнобедрений трикутник ABC, $AB = BC = 18$. Грані SAC і SAB перпендикулярні до площини основи піраміди, а ребро SB нахилене до неї під кутом 30°. Визначте кут між площинами (SBC) і (ABC), якщо площа основи піраміди дорівнює 72.

ЗНО_2016_Д



1. $\left.\begin{matrix}(SAC) \perp (ABC) \\ (SAB) \perp (ABC)\end{matrix}\right| \to$ висота піраміди SA, пряма перетину даних площин.

2. $SA \perp (ABC)$, SB – похила, отже AB – проекція SB на (ABC). Тому кут між площинами SB та $(ABC) = \angle SBA = 30°$.

3. У ΔSAB $(\angle A) = 90°$. $SA = AB \operatorname{tg} B = 18 \cdot \operatorname{tg} 30° = 18 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$.

4. За умовою, ΔABC – гострокутний, тому основа висоти AK до сторони BC належить стороні BC.

5. $AK \perp BC$, $SK \perp BC$ (за теоремою про три перпендикуляри), звідси $(SAK) \perp BC$, а отже $\angle SKA$ – лінійний кут двогранного кута між площинами (SBC) та (ABC).

6. $S_{осн} = S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 18 \cdot AK = 72$, отже, $AK = 8$.

7. У ΔSAK $(\angle A = 90°)$ $\operatorname{tg} K = \dfrac{SA}{AK} = \dfrac{6\sqrt{3}}{8} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, а $\angle K = \operatorname{arctg} \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Відповідь: arctg $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Завдання 32 з 33

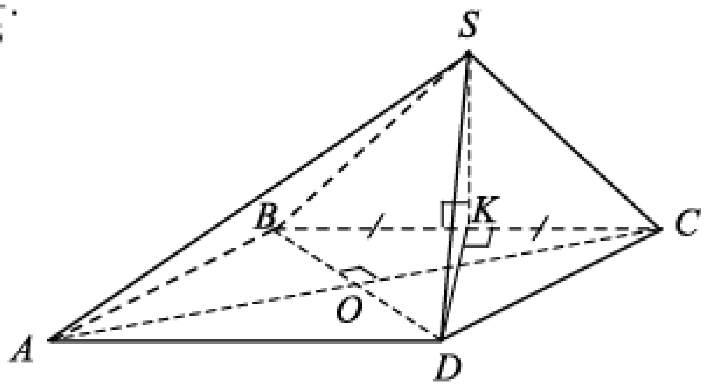
Основою піраміди $SABCD$ є ромб $ABCD$, більша діагональ якого $AC = 30$. Грань SBC є рівнобедреним трикутником $(SB = SC)$ і перпендикулярна до площини основи піраміди. Ребро SC нахилено до площини основи піраміди під кутом $30°$. Визначте кут між площинами (SAD) і (ABC), якщо висота піраміди дорівнює 5.

1) Нехай $SABCD$ – задана правильна чотирикутна піраміда, ромб $ABCD$ – основа піраміди, діагоналі якого перпендикулярні і перетинаються в точці O. Оскільки грань SBC перпендикулярна до площини основи піраміди, то точка K – основа висоти піраміди – належить відрізку BC. Оскільки у трикутнику SBC $SB = SC$, то точка K є серединою сторони BC (див. рисунок). Кут нахилу ребра SC до площини основи піраміди – це кут між ребром SC та відрізком KC, що є ортогональною проекцією цього ребра на площину основи піраміди. Отже, $\angle SCK = 30°$. Крім цього, у прямокутному трикутнику SKC відомий катет $SK = 5$. Тоді $KC = SK \operatorname{ctg} 30° = 5\sqrt{3}$, $BC = 2KC = 10\sqrt{3}$.

Розглянемо прямокутний трикутник BOC: $\angle O = 90°$, $BC = 10\sqrt{3}$ – гіпотенуза, $OC = \frac{1}{2}AC = 15$ – катет. За теоремою Піфагора

$BO = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{\left(10\sqrt{3}\right)^2 - 15^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$. Тоді $BD = 2BO = 10\sqrt{3}$.

У трикутнику BCD усі сторони рівні: $BD = BC = DC = 10\sqrt{3}$. Отже, відрізок DK є висотою цього трикутника, проведеної з вершини D до сторони BC. Звідси випливає, що площина, що проходить через висоту SK перпендикулярно до прямої AD перетинає цю пряму в точці D. Таким чином, $\angle SDK$ – кут між площинами (SAD) і (ABC) (він є також лінійним кутом двогранного кута при ребрі AD). У прямокутному трикутнику SKD відомі катети $SK = 5$ та $DK = OC = 15$. Тоді $\operatorname{tg} \angle SDK = \frac{SK}{DK} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. Отже, кут між площинами (SAD) і (ABC) дорівнює $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

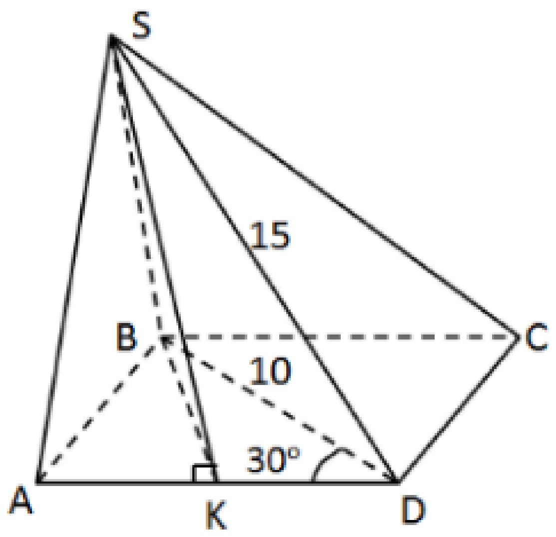


Зауваження. Оскільки відрізок KD – це висота ромба $ABCD$, то довжину висоти ромба можна визначити за формулою $h = \frac{S}{a}$, де S – площа ромба, a – сторона ромба. Для обчислення площі ромба можна застосувати, наприклад, формулу $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$, де d_1, d_2 – діагоналі ромба.

Відповідь: $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$ з гострим кутом A. Ребро SB перпендикулярне до прямих AB і BC. Проекцією ребра SD на площину основи піраміди є відрізок довжиною 10 *см*, який утворює зі стороною AD кут 30°. Визначте кут між площинами (SAD) і (ABC), якщо $SD = 15$ *см*.

ПЗНО_2017



1. За умовою $SB \perp AB$ та $SB \perp BC$, тому $SB \perp (ABC)$ за ознакою перпендикулярності прямої та площини.
SB – висота піраміди.

2. $SB \perp (ABC)$, SD – похила, тому BD – проекція похилої. $BD = 10$ см, $\angle BDA = 30°$.

3. $BK \perp AD$ – висота паралелограма. За теоремою про три перпендикуляри $SK \perp AD \rightarrow AD \perp (SKB)$, а $\angle SKB$ – лінійний кут відповідного двогранного між площинами (SAD) та (ABC).

4. У ΔBKD ($\angle K = 90°$) $\angle D = 30°$, $BD = 10$ см.

$BK = BD \sin 30° = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ (см).

5. У ΔSBD ($\angle B = 90°$) за теоремою Піфагора $SD^2 = SB^2 + BD^2$,

$SB = \sqrt{SD^2 - BD^2} = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{225 - 100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ (см).

6. У ΔSBK ($\angle B = 90°$)

$\mathrm{tg}\, K = \frac{SB}{BK} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$.

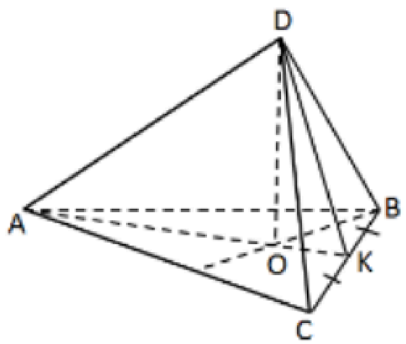
Отже, $\angle SKB = \mathrm{arctg}\sqrt{5}$.

Визначте площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди, довжина сторони основи якої дорівнює 10 *см*, а довжина бічного ребра – *13 см*.

А	Б	В	Г	Д
180 $см^2$	15 $\sqrt{69}см^2$	30 $\sqrt{69}см^2$	360 $см^2$	390 $см^2$

ЗНО_2017_Д

Дано: правильна трикутна піраміда, тому основа – правильний трикутник, основа висоти – центр трикутника.



$AB = BC = AC = 10$ *см*, $DA = DB = DC = 13$ *см*.
$DK \perp BC$ – апофема, $CK = KB = 5$ *см*.

У ΔDKB ($\angle K = 90°$) за теоремою Піфагора:
$DB^2 = DK^2 + KB^2$, $DK = \sqrt{169 - 25} = 12$ (*см*).

$S_{біч} = p_{осн} \cdot l$, де $p_{осн}$ – півпериметр основи, $DK = l$ – апофема.

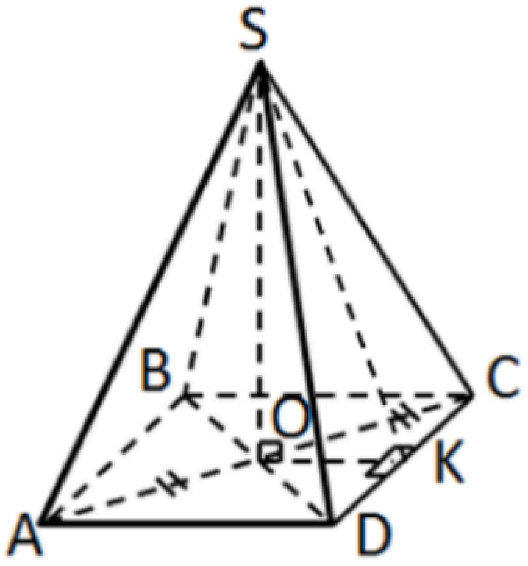
$S_{біч} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 12 = 180$ ($см^2$).

Відповідь – А.

Периметр основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 72 *см*. Визначте довжину висоти піраміди, якщо її апофема дорівнює 15 *см*

А	Б	В	Г	Д
6 *см*	9 *см*	10 *см*	12 *см*	14 *см*

ЗНО_2017



Піраміда – правильна, тому основа – квадрат, основа висоти – центр квадрата (точка перетину діагоналей).
$P_{ABCD} = 4AB = 72$ *см*, $AB = 18$ *см*.
$SK \perp CD$ – апофема, $SK = 15$ *см*. ΔSDC – рівнобедрений, тому SK – висота та медіана.
$DK = KC$, $AD = DC$, $AO = OC$ звідси випливає $OK = \frac{1}{2} AD = 9$ *см*.

ΔSOK ($\angle O = 90°$) за теоремою Піфагора $SK^2 = SO^2 + OK^2$, $SO = \sqrt{SK^2 - OK^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$ *см*.

Відповідь – Г.

Завдання 19 з 33

$SABC$ і $S_1A_1B_1C_1$ – правильні трикутні піраміди. Кожне ребро піраміди $SABC$ вдвічі більше за відповідне ребро піраміди $S_1A_1B_1C_1$. Визначте площу бічної поверхні піраміди $SABC$, якщо площа бічної грані $S_1A_1B_1$ дорівнює 8 $см^2$.

А	Б	В	Г	Д
16 $см^2$	24 $см^2$	48 $см^2$	64 $см^2$	96 $см^2$

ПЗНО_2018

Дано $SABC$ і $S_1A_1B_1C_1$ – правильні трикутні піраміди. Отже, кожна бічна грань є рівностороннім трикутником.

ΔSAB подібний $\Delta S_1A_1B_1$ (за трьома сторонами).

$AB = 2A_1B_1$, $k = 2$ коефіцієнт подібності $k^2 = 4$.

$S_{S_1A_1B_1} = 8$ см^2, тому $S_{SAB} = 8 \cdot 4 = 32$ (см^2).

Площа бічної поверхні піраміди $SABC$ дорівнює $3 \cdot S_{SAB} = 3 \cdot 32 = 96$ (см^2).

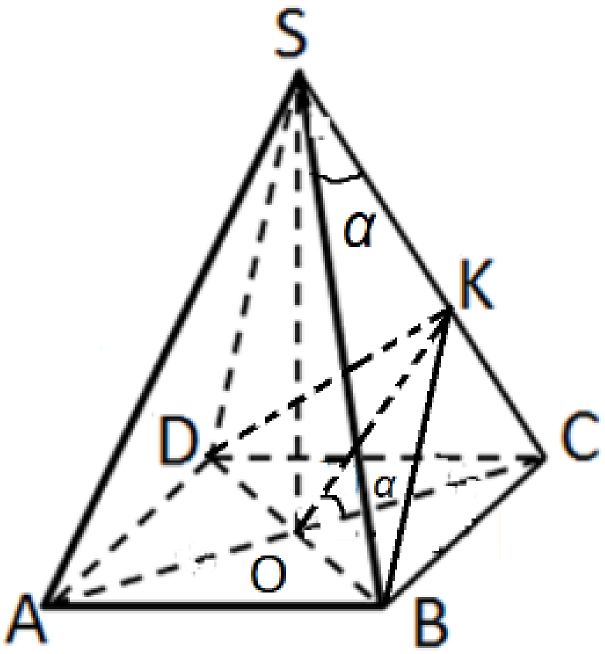
Відповідь – Д.

Завдання 32 з 33

У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ через діагональ BD основи перпендикулярно до бічного ребра SC проведено площину γ. Ця площина утворює з площиною основи піраміди кут α. Висота піраміди дорівнює H.

1. Побудуйте переріз піраміди $SABC$ площиною γ.
2. Обґрунтуйте вид перерізу.
3. Визначте площу перерізу.

ЗНО_2018_Д



SABCD – правильна піраміда, ABCD – квадрат.

SO ⊥ (ABC), AC ∩ BD = 0.

1. Проведемо $BK \perp SC$.
$\Delta BKC = \Delta DKC$ за двома сторонами та кутом між ними, KC – спільна,
$DC = BC$ – сторона квадрата.
$\angle DCK = \angle BCK$ (правильна піраміда).
Отже, $DK \perp SC$.
Так як $SC \perp BK$ і $SC \perp DK$, то $SC \perp (DKB)$ за ознакою перпендикулярності прямої та площини.
$(DKB) = \gamma$ шуканий переріз.

2. ΔBKD рівнобедрений $BK = DK$, $DO = OB$, звідси OK – медіана і висота.
$OK \perp BD$ і $OC \perp BD$ (за властивістю діагоналей), звідси $(BDC) \cap (ABC) =$
$= BD$.
$\angle((BDK), (ABC)) = \angle KOC = \alpha$ лінійний кут відповідного двогранного.

3. $SC \perp (BDK)$, $OK \subset (BDK)$, тому $SC \perp DK$.
$\angle SOC = 90°$, $\angle KOC = \alpha$, тому $\angle SOK = 90° - \alpha$.
У ΔSOK ($\angle K = 90°$) $\angle S = \alpha$, $SO = H$
$OK = SO \cdot \sin S = H\sin\alpha$
У ΔSOC ($\angle O = 90°$) $OC = H\operatorname{tg}\alpha$.
$ABCD$ – квадрат. За властивістю діагоналей $AO = OC = OB = OD = H\operatorname{tg}\alpha$
Відповідно до умови завдання необхідно побудувати переріз піраміди *SABC*, а перерізом цієї піраміди є *KOB*, тому

$$S_{KOB} = \frac{1}{2} S_{BDK} = \frac{1}{2} H^2\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\alpha.$$

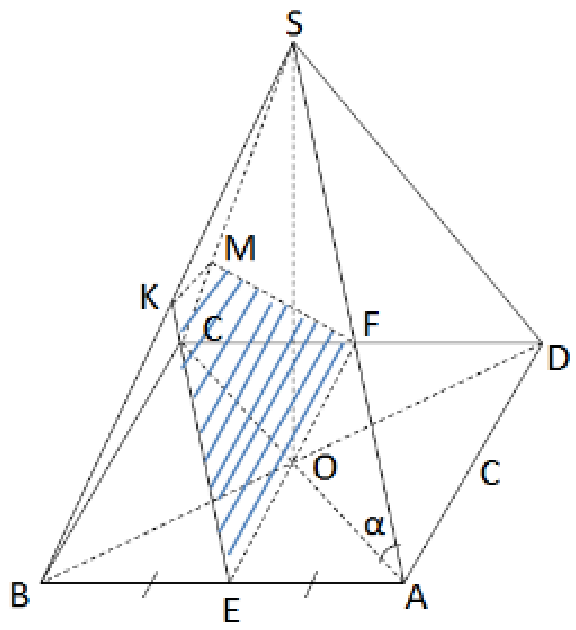
Відповідь: $\mathbf{\frac{1}{2} H^2\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\alpha.}$

Завдання 32 з 33

У правильній чотирикутній піраміді *SABCD* сторона основи *ABCD* дорівнює *c*, а бічне ребро *SA* утворює з площиною основи кут α. Через основу висоти піраміди паралельно грані *ASD* проведено площину β.

1. Побудуйте переріз піраміди *SABCD* площиною β
2. Обґрунтуйте вид перерізу.
3. Визначте периметр перерізу.

ЗНО_2018



1. $SABCD$ – правильна піраміда, тому в основі лежить квадрат $ABCD$ і основа висоти є центром квадрата, тобто точкою перетину діагоналей. Бічне ребро SA утворює з площиною основи кут α. $SO \perp (ABC)$, SA – похила, OA – проекція SA на площину основи, тому
$\angle(SA, (ABC)) = \angle SAO = \alpha$.
Побудуємо переріз піраміди площиною $\beta \parallel (SAD)$. За властивістю паралельних площин паралельні площини β та (SAD) перетинаються третьою, площиною (ABC) по паралельних прямих, тому будуємо $EF \parallel AD$ через т. O.
$\beta \parallel (ASD)$ та перетинаються площиною (ASB) по паралельним прямим, тому будуємо $KE \parallel SA$ (слід січної площини на (ASB)).
$\beta \parallel (ASD)$ перетинаються (SCD) по $MF \parallel SD$. З'єднаємо т. K та т. M, що належать (BSC). $KMFE$ – шуканий переріз.

2. т. E – середина AB, $KE \parallel SA$ за побудовою, тому KE – середня лінія ΔSBA $\rightarrow BK = KS$.
т. F – середина DC, $MF \parallel SD$ за побудовою, тому MF – середня лінія ΔSDC $\rightarrow CM = MS$.
У ΔBCS KM – середня лінія, тому $KM \parallel BC$
$EF \parallel BC$ (за побудовою), $KM \parallel BC$ – тому $KM \parallel EF$ за ознакою паралельних прямих. Отже, $KMFE$ – трапеція.
$SABCD$ – правильна піраміда, тому $\Delta SBA = \Delta SCD$, $KE = MT$ як відповідні середні лінії. Отже, $KMFE$ – рівнобічна трапеція.

3. $AB = c$, то діагональ квадрата $ABCD$ $AC = c\sqrt{2}$, $AO = \frac{1}{2}$ $AC = \frac{c\sqrt{2}}{2}$.

У ΔSOA ($\angle O = 90°$). $\angle A = \alpha$, $SA = \frac{OA}{\cos\alpha} = \frac{c\sqrt{2}}{2\cos\alpha}$.

$KE = \frac{1}{2}$ $SA = \frac{c\sqrt{2}}{4\cos\alpha} = MF$.

$EF = AD = c$, $KM = \frac{1}{2}$ $BC = \frac{1}{2}$ c

Знаходимо периметр трапеції:

$$P = EF + KM + 2 \cdot KE = c + \frac{c}{2} + 2 \cdot \frac{c\sqrt{2}}{4cos\alpha} = c + \frac{c}{2} + \frac{c\sqrt{2}}{2cos\alpha} =$$

$$= \frac{2c\ cos\alpha + c\ cos\alpha + c\sqrt{2}}{2cos\alpha} = \frac{c(2cos\alpha + cos\alpha + c\sqrt{2})}{2cos\alpha} =$$

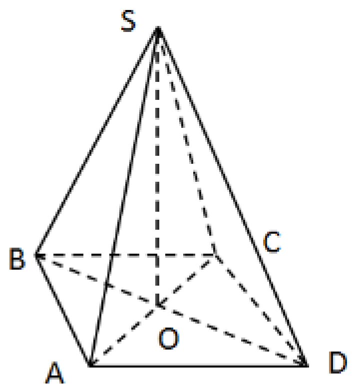
$$P = \frac{3cos\alpha + \sqrt{2}}{2cos\alpha} \cdot c$$

Відповідь: $P = \frac{3cos\alpha + \sqrt{2}}{2cos\alpha} \cdot c$.

Завдання 11 з 33

Площа основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 36 $см^2$. Визначте об'єм цієї піраміди, якщо її висота вдвічі більша за сторону основи.

А	Б	В	Г	Д
108 $см^3$	144 $см^3$	216 $см^3$	288 $см^3$	432 $см^3$



$S_{\text{ABCD}} = 36$ см^2 $SO = 2AB$

Піраміда $SABCD$ – правильна, тому $ABCD$ – квадрат.

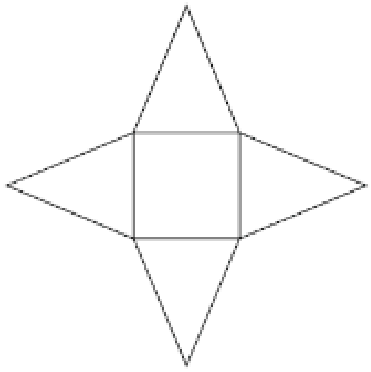
$S_{\text{ABCD}} = AB^2 = 36$ (см^2), $AB = 6$ см.

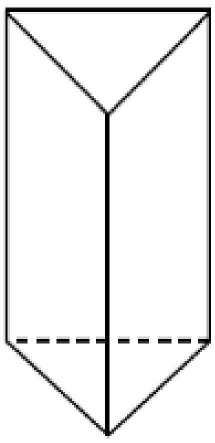
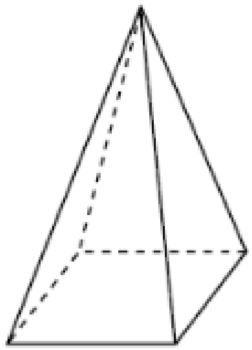
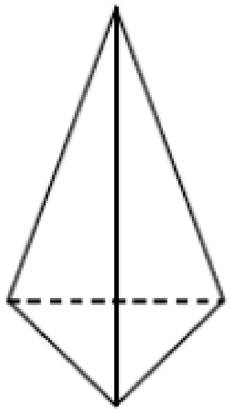
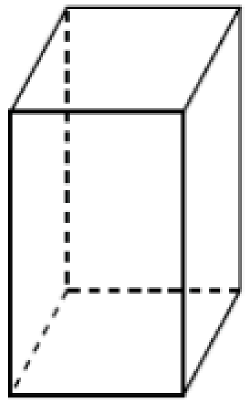
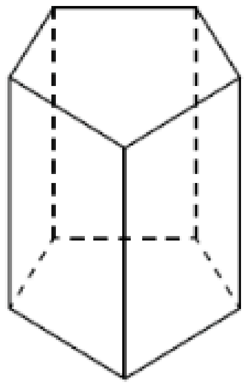
$SO = 2 \cdot AB = 2 \cdot 6 = 12$ (см).

$V = \frac{1}{3} S_{\text{ABCD}} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 12 = 12 \cdot 12 = 144$ (см^3).

Відповідь – Б.

Розгортку якого з наведених многогранників зображено на рисунку?



А	Б	В	Г	Д
				

ЗНО_2019_Д

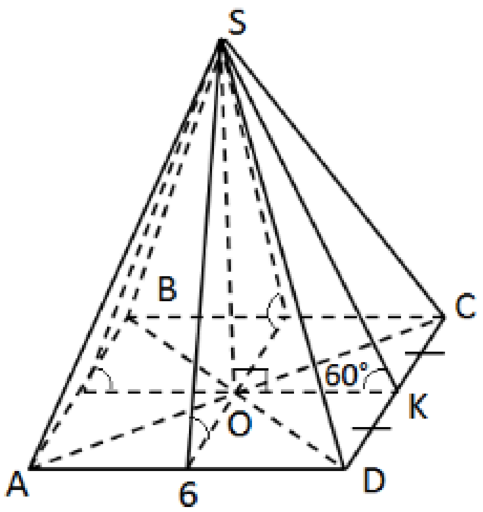
На рисунку зображена розгортка чотирикутної піраміди.

Відповідь: Б.

Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 *см*, усі її бічні грані нахилені до площини основи під кутом 60°. Визначте площу бічної поверхні цієї піраміди.

А	Б	В	Г	Д
72 $см^2$	$24\sqrt{3}$ $см^2$	$48\sqrt{3}$ $см^2$	$72\sqrt{3}$ $см^2$	144 $см^2$

ЗНО_2019



SABCD – правильна піраміда. *ABCD* – квадрат зі стороною 6 см.
SK – апофема.

$$\left.\begin{matrix} SK \perp CD \\ OK \perp CD \end{matrix}\right| \to (SOK) \perp CD \to$$

$\angle SKO = 60°$ – лінійний кут відповідного двогранного кута між площинами (SCD) та (ABC).

$\Delta SOK\ (\angle = 90°)\quad OK = \dfrac{1}{2}AD = 3$ см.

$SK = \dfrac{OK}{\cos 60°} = \dfrac{3}{1/2} = 6$ (см).

$S_{біч} = \dfrac{1}{2}P_{осн} \cdot SK$, де $P_{осн}$ – периметр основи;

$P_{осн} = 4 \cdot 6 = 24$ см

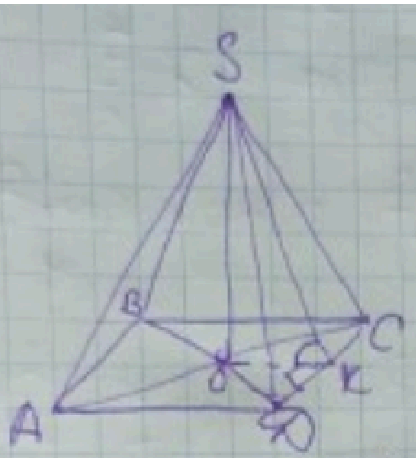
$S_{біч} = \dfrac{1}{2}P_{осн} \cdot SK = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 72$ (см^2).

Відповідь: А.

Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 24, апофема утворює з площиною основи піраміди кут 45°. Визначте довжину сторони основи цієї піраміди.

А	Б	В	Г	Д
24	$16\sqrt{3}$	$24\sqrt{2}$	48	$48\sqrt{2}$

ПЗНО_2020



Дано: SABCD – прав. чот. пір.

$h = SO = 24$

$\angle SKO = 45^\circ$

Знайти: CD – ?

З $\triangle SOK$ ($\angle O = 90^\circ$):

$OK = SO \cdot \operatorname{tg} \angle OSK$, $\angle OSK = \angle SKO = 45^\circ$

$OK = 24 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 24$;

З $\triangle DKO$ ($\angle K = 90^\circ$) – рівнобедр.

$DK = OK$

$DK = OK = 24$

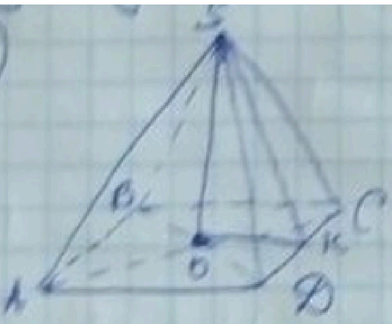
$CD = 2DK = 2 \cdot 24 = 48$

В-дь: Г) (48)

Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 12 см, апофема – 13 см. Обчисліть об'єм (у см^3) цієї піраміди.

ЗНО_2020

30



SO = 12

SK = 13 см

Знайти V - ?

$V = \frac{1}{3} S_o h$

Розглянемо $\triangle SOK$ ($\angle O = 90^\circ$)

$OK^2 = SK^2 - SO^2$

$OK^2 = 13^2 - 12^2$

$OK^2 = 25$

$OK = 5$

$AB = 2 \cdot OK = 10$

$S_o = AB^2 = 10^2 = 100$

$V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400$ (см³)   Відповідь: $\boxed{V = 400 \text{ см}}$