РОЗДІЛ 6 ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОГО ЗМІННОГО

6.1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

6.1.1. Поняття комплексних чисел

Означення. *Комплексним числом* називається число виду $z = a + ib$, де a, b — дійсні числа, $i^2 = -1$. Число a називається *дійсною частиною*, bi — *уявною частиною*, i — *уявною одиницею*. Множина комплексних чисел позначається $\boldsymbol{C}$.

Означення. Комплексні числа виду $a + bi$ і $a - bi$ називаються *спряженими*. Комплексні числа виду $a + bi$ і $-a - bi$ називаються *протилежними*. Спряжене до комплексного числа z позначається $\bar{z}$.

Означення. Два комплексних числа $a + bi$ і $a_1 + b_1 i$ вважаються *рівними* в тому і тільки в тому випадку, якщо $a = a_1$ і $b = b_1$.

Зауваження. Щодо комплексних чисел не прийнято жодної угоди, яке з них вважати більшим.

6.1.2. Дії з комплексними числами

Додавання: $(a + bi) + (a_1 + b_1 i) = (a + a_1) + (b + b_1)i$.

Віднімання: $(a + bi) - (a_1 + b_1 i) = (a - a_1) + (b - b_1)i$.

Множення: $(a + bi)(a_1 + b_1 i) = aa_1 + a_1 bi + ab_1 i + bb_1 i^2 = (aa_1 - bb_1) + (a_1 b + ab_1)i$.

Ділення:

$$\frac{a+bi}{a_1+b_1 i} = \frac{(a+bi)(a_1-b_1 i)}{(a_1+b_1 i)(a_1-b_1 i)} = \frac{aa_1 bb_1 + (a_1 b - ab_1)i}{a_1^2 - (b_1 i)^2} = \frac{aa_1 + bb_1}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_1 b - ab_1}{a_1^2 + b_1^2} i .$$

Піднесення до степеня: спочатку знайдемо результати від піднесення до степеня уявної одиниці, знаючи, що за умовою i^2 треба вважати таким, що дорівнює -1.

$i^0 = 1$ $\qquad$ $i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^1 = i$ $\qquad$ $i^6 = i^5 \cdot i = -1$

$i^2 = -1$ $\qquad$ $i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$ $\qquad$ $i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = 1$

$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = 1$ і т. п.

Отже, дістали чотири значення, що чергуються:

i; -1; $-i$; $+1$, тоді:

$(a + ib)^2 = a^2 + 2abi + b^2 i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$,

$(a + ib)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3a(ib)^2 + (ib)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2 b - b^3)i$ і т. п.

Добування квадратного кореня: Припустимо, що $\sqrt{a+bi} = x + iy.$

Тоді $a + bi = (x^2 - y^2) + 2xyi$.

Отже, маємо:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2)^2 = a^2 \\ (2xy)^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2 + b^2 \\ x^2 - y^2 = a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \end{cases}.$$

З рівняння $2xy = b$ випливає, що знаки x та y мають бути однакові, якщо $b > 0$, і різні, якщо $b < 0$.

Тому $\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right]$ при $b > 0$;

$\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right]$ при $b < 0$.

Зауваження. Для того щоб з комплексного числа можна було добути корінь третього, або вищого степеня, йому треба надати іншого вигляду.

Приклад. Нехай $z_1 = 5 + i6$; $z_2 = 7 - i9$; $z_3 = 5 + 12i$.

Знайти: $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2, z_1^2, $\sqrt{z_3}$.

● $z_1 + z_2 = (5 + 6i) + (7 - 9i) = (5 + 7) + i(6 - 9) = 12 - 3i$;

$z_1 \cdot z_2 = (5 + 6i) \cdot (7 - 9i) = 5 \cdot 7 + 6i \cdot 7 - 5 \cdot 9i - i6 \cdot i9 =$

$= 35 + 42i - 45i + 54 = 89 - 3i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5+6i}{7-9i} = \frac{(5+6i)(7+9i)}{(7-9i)(7+9i)} = \frac{35+42i+45i-54}{49+81} = \frac{-19+87i}{130} = -\frac{19}{130} + \frac{87}{130}i;$$

$z_1^2 = (5 + i6)^2 = 25 + 2 \cdot 5 \cdot 6i + (i6)^2 = 25 + 60i - 36 = -11 + 60i$;

$$\sqrt{z_3} = \sqrt{5+12i} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\right] =$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{18}{2}} + i\sqrt{\frac{8}{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{9} + i\sqrt{4}\right) = \pm(3 + 2i).$$

6.1.3. Геометричне зображення комплексного числа (інтерпретація Гаусса)

Будь-яке комплексне число $a + bi$ можна зобразити геометрично.

Візьмемо в площині прямокутну систему координат і, вибравши одиницю довжини, зображатимемо дійсні числа на осі абсцис, а уявні — на осі ординат. Відповідно до цього вісь абсцис називається *дійсною віссю*, а вісь ординат — *уявною*.

Число $a + bi$ зображатимемо точкою площини, абсциса якої чисельно дорівнює a, а ордината дорівнює b (рис. 6.1).

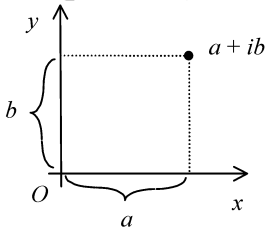

Рис. 6.1

6.1.4. Тригонометрична форма комплексного числа

Зображення комплексних чисел за допомогою точок на площині дає змогу подати число $a + bi$ в іншому вигляді, а саме — у *тригонометричній формі.*

Нехай точка M (рис. 6.2) зображає комплексне число $a + ib$.

Тоді $OA = a$, $AM = b$. Позначимо віддаль OM точки від початку координат через r, а кут AOM, утворюваний OM з віссю x, — через ϕ. Тоді з трикутника AOM матимемо:

$$a = r\cos\phi,\ b = r\sin\phi. \qquad (6.1)$$

Підставивши в комплексне число $a + bi$ значення a і b (6.1), дістанемо

$$a + bi = r\cos\phi + r\sin\phi \cdot i \qquad (6.2)$$

або

$$a + bi = r(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Це є *тригонометрична форма комплексного числа*. Довжина $OM = r$ називається *модулем комплексного числа*, а кут $AOM = \phi$ — *його аргументом*.

Покажемо, як перетворити в тригонометричну форму комплексне число, подане в звичайній алгебраїчній формі.

Для цього треба знайти r і ϕ за даними a і b. З трикутника OAM (рис. 6.2) маємо:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \qquad (6.3)$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{r},\quad \cos\varphi = \frac{a}{r} \qquad (6.4)$$

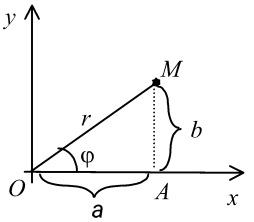

Рис. 6.2

Приклад. Подати в тригонометричній формі число $-3 + 2i$.

● З формул (6.3) маємо:

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13},\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{-3} \approx -0{,}6666...$$

Тангенс від'ємний, отже, кут ϕ треба шукати в II або IV чверті. З формул (6.4) виходить, що при $a = -3$ і $b = 2$ синус буде додатний, а косинус — від'ємний, тобто ϕ буде кутом II чверті. На ПОМ або за таблицями знаходимо: $\phi = 146°\ 18'$, а тому $-3 + 2i = \sqrt{13}(\cos 146°18' + i\sin 146°18')$.

6.1.5. Дії з комплексними числами, поданими в тригонометричній формі

Додавати і віднімати комплексні числа простіше і зручніше, коли компоненти подані в алгебраїчній формі. Зовсім інша річ з останніми чотирма алгебраїчними діями.

Множення. Нехай треба перемножити числа:

$$a = R_1(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad b = R_2(\cos\beta + i\sin\beta).$$

Дістанемо:

$$ab = R_1R_2[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)] \qquad (6.5)$$

Звідси випливає:

Модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добуткові модулів співмножників, а аргумент — сумі аргументів співмножників.

Приклад. Нехай:

$$a = 3(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ); \quad b = 2(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ).$$

Тоді $ab = 3\cdot 2[\cos(20^\circ + 35^\circ) + i\sin(20^\circ + 35^\circ)] = 6(\cos 55^\circ + i\sin 55^\circ)$.

Ділення. Нехай треба число $a = R_1(\cos\alpha + \sin\alpha)$ поділити на число $b = R_2(\cos\beta + i\sin\beta)$.

Матимемо:

$$\frac{a}{b} = \frac{R_1(\cos\alpha+\sin\alpha)}{R_2(\cos\beta+\sin\beta)} = \frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta+i\sin\beta} =$$

$$= \frac{R_1}{R_2}\cdot[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)]. \qquad (6.6)$$

Модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів, а аргумент — різниці аргументів діленого і дільника.

Приклад. Нехай $a = 12(\cos 55^\circ + i\sin 55^\circ)$; $b = 3(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ)$.

Тоді $\frac{a}{b} = \frac{12}{3}(\cos(55^\circ - 35^\circ) + i\sin(55^\circ - 35^\circ)) = 4(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)$.

Піднесення до степеня. Нехай треба число $a = R(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ піднести до степеня n:

Матимемо:

$$a^n = [R(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^n = R^n(\cos\alpha n + \sin\alpha n). \qquad (6.7)$$

Модуль степеня комплексного числа дорівнює тому самому степеню модуля основи, а аргумент — аргументові основи, помноженому на показник степеня.

У частинному випадку, якщо $r = 1$, формула (6.7) набуває вигляду

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Ця формула має назву *формули Муавра*.

Приклад. Піднести до куба число $a = 2(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)$.

● Матимемо:

$$a^3 = 8(\cos 3\cdot 20 + i\sin 3\cdot 20) = 8(\cos 60 + \sin 60) = 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 + 4\sqrt{3}i.$$

Формула Ейлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$,

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Добування кореня. Добудемо корінь n-го степеня з числа:

$$a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Матимемо:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right] \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{6.8}$$

1. *Модуль кореня n-го степеня з комплексного числа дорівнює кореню того самого степеня з модуля підкореневого числа, а аргумент — аргументові підкореневого числа, поділеному на показник кореня.*

2. *Корінь n-го степеня з комплексного числа має n різних значень.*

За допомогою формули Ейлера можна дістати *показникову форму* комплексного числа $z = re^{i\varphi}$.

6.1.6. Квадратний тричлен з комплексними числами

Дано тричлен $y = ax^2 + bx + c$.

Відомо, що корені його комплексні. У цьому випадку $b^2 - 4ac < 0$. Перетворимо тричлен до вигляду

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Додамо й віднімемо по $\frac{b^2}{4a^2}$:

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right); \quad y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

При всіх значеннях x вираз $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ є число додатне або таке, що дорівнює нулю (при $x = -\frac{b}{2a}$).

Дослідимо, який знак має другий доданок $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$.

У випадках комплексних коренів вираз $b^2 - 4ac$ від'ємний, а протилежне йому число $-(b^2 - 4ac)$, тобто $4ac - b^2$, — число додатне.

Знаменник $4a^2$ теж число додатне, а отже, дріб $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ є додатним числом. Значить, уся сума, що міститься в квадратних дужках, буде додатним числом при всіх значеннях.

Звідси випливає, що знак числової величини тричлена залежить лише від знака a: при a додатному тричлен має додатні значення, при a від'ємному — від'ємні.

Якщо тричлен має комплексний корінь, то при всіх значеннях x його числове значення має той самий знак, що й коефіцієнт при x^2.

6.1.7. Загальний висновок про квадратні рівняння

Загальна формула для коренів повного квадратного рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$ буде

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Корені квадратного рівняння будуть обидва дійсні або обидва уявні залежно від того, чи буде дискримінант (у перекладі розрізнювач) $b^2 - 4ac$ величиною додатною чи від'ємною:

1. $b^2 - 4ac > 0$. У цьому випадку вираз під коренем додатний. Квадратний корінь з цього виразу має два значення, і, отже, рівняння має два різні дійсні корені:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2. $b^2 - 4ac = 0$. У цьому випадку другий член чисельника дорівнює нулю і рівняння має два рівні корені: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

3. $b^2 - 4ac < 0$. У цьому випадку рівняння має два комплексно спряжені корені:

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

6.1.8. Загальний вигляд алгебраїчного рівняння

Означення. Будь-яке рівняння, в якому невідоме пов'язане з даними числами за допомогою скінченного числа шістьох алгебраїчних дій (додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня і добування кореня), можна звести до такого цілого й раціонального вигляду:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + ... + Kx + L = 0, \quad (6.9)$$

де коефіцієнти A, B, C, ..., K і L є сталі дійсні або комплексні числа, m є показник степеня рівняння. Деякі коефіцієнти в окремих випадках можуть дорівнювати нулю.

Рівняння такого виду називаються *алгебраїчними*. Алгебраїчні рівняння степеня, вищого від другого, називаються *рівняннями вищих степенів*.

Рівняння вищих степенів становлять предмет вищої алгебри. Елементарна алгебра розглядає тільки окремі види цих рівнянь.

Вища алгебра встановлює таку важливу теорему: **будь-яке алгебраїчне рівняння має дійсний або комплексний корінь**. (*Теорема Гаусса*).

Допустивши це твердження, можна показати, що **алгебраїчне рівняння має стільки коренів, дійсних або комплексних, скільки одиниць у показнику його степеня**.

Тоді рівняння (6.9) можна подати у вигляді:

$$A(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) ... (x - \lambda) = 0,$$

де всіх різниць: $x - \alpha$, $x - \beta$, ..., буде m. В окремих випадках деякі і навіть усі корені можуть бути однакові.

Корисно звернути увагу ще на такі твердження, що їх доводять у вищій алгебрі.

Твердження 1. **Сума коренів будь-якого алгебраїчного рівняння (6.9) дорівнює $-\frac{B}{A}$, а добуток коренів дорівнює $(-1)^m \frac{L}{A}$.**

Твердження 2. **Якщо алгебраїчне рівняння з дійсними коефіцієнтами має комплексні корені, то число цих коренів парне.**

Твердження 3. **Якщо алгебраїчне рівняння з дійсними коефіцієнтами має *n* коренів виду *p* + *qi*, то воно має ще *n* коренів виду *p* – *qi*.**

Твердження 4. **Алгебраїчне рівняння непарного степеня з дійсними коефіцієнтами має принаймні один дійсний корінь.**

Твердження 5. **Рівняння з довільними буквеними коефіцієнтами степеня не вище четвертого можна в загальному розв'язати алгебраїчно, тобто для коренів цих рівнянь знайдені загальні формули, складені з коефіцієнтів рівняння за допомогою алгебраїчних дій.**

Твердження 6. **Рівняння з довільними буквеними коефіцієнтами степеня, вищого від четвертого, не можна у загальному розв'язати алгебраїчно, проте, коли коефіцієнти рівняння якого завгодно степеня виражені числами, завжди є змога обчислити з бажаним степенем наближення всі його корені, як дійсні так і уявні. Способи такого обчислення викладаються у вищій алгебрі.**

План практичних занять

1. Дії з комплексними числами, що задані в алгебраїчній формі.
2. Дії з комплексними числами, що задані в тригонометричній формі.
3. Розв'язування алгебраїчних рівнянь.

Термінологічний словник ключових понять

Комплексне число — це число виду $z = a + ib$, де $i^2 = -1$.

Уявна одиниця — це число i таке, що $i^2 = -1$.

Спряжені комплексні числа — це числа виду $a + ib$ і $a - ib$.

Тригонометрична форма комплексного числа — це подання комплексного числа у вигляді $z = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$.

Модуль комплексного числа — це значення $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Аргумент комплексного числа — це кут ϕ такий, що $\operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \varphi$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$.

Муавра формула — $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

Ейлера формула — $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$.

Показникова форма ϕ комплексного числа — $z = re^{i\varphi}$, r — модуль, ϕ — аргумент комплексного числа.

Навчальні завдання

1. Нехай $z = x + iy$. Записати в алгебраїчній формі вираз

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{\bar{z}^2}.$$

● Згідно з означеннями дій із комплексними числами маємо:

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{\bar{z}^2}=\frac{\bar{z}^2+z^2}{z^2\cdot\bar{z}^2}=\frac{(x-iy)^2+(x+iy)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2-y^2-2xyi+x^2-y^2+2xyi}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

2. Довести, що при всіх можливих значеннях $\alpha \in R$ виконується рівність:

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}\quad (n\in N).$$

$$\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+i\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-i\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha},$$

● Оскільки то за формулою Муавра маємо

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^n}{(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n}=\frac{\cos n\alpha+i\sin n\alpha}{\cos n\alpha-i\sin n\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)/\cos n\alpha}{(\cos n\alpha-i\sin n\alpha)/\cos n\alpha}=\frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}.$$

3. Обчислити $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{60}$.

● Числа $z_1=1+i\sqrt{3}$ і $z_2=1-i$ представимо у вигляді:

$$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),\quad z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{60}=\frac{2^{60}\left(\cos\dfrac{60\pi}{3}+i\sin\dfrac{60\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^{60}\left(\cos\dfrac{60\pi}{4}-i\sin\dfrac{60\pi}{4}\right)}=2^{30}\frac{1+i\cdot 0}{-1+i\cdot 0}=-2^{30}$$

Тоді .

4. Виразити sin5*x* через функції sin*x* і cos*x*.

● Розглянемо комплексне число $z=\cos x+i\sin x$. За формулою Муавра $z^5=\cos 5x+i\sin 5x$.

Користуючись формулою бінома Ньютона, дістаємо:

$$z^5=\cos^5 x+5i\cos^4 x\sin x-10\cos^3 x\sin^2 x-10i\cos^2 x\sin^3 x+$$

$$+5\cos x\sin^4 x+i\sin^5 x=\left(\cos 5x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x\right)+$$

$$+i\left(5\cos^4 x\sin x-10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x\right).$$

Отже, $\sin 5x=5\cos^4 x\sin x-10\cos^2\cdot x\sin^3 x+\sin^5 x$ і водночас $\cos 5x=\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\cdot\sin^4 x$.

5. Яку множину на площині комплексного змінного *z* визначає умова $|z-1|\geq 2|z-i|$?

● Нехай $z = x + iy$. Тоді $|x-1+iy| \geq 2|x+i(y-1)|$

або $\sqrt{(x-1)^2+y^2} \geq 2\sqrt{x^2+(y-1)^2}$.

Підносячи обидві частини цієї нерівності до квадрата, маємо:

$$(x-1)^2 + y^2 \geq 4\left(x^2 + (y-1)^2\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 8y - 4 \geq 0$$
$$-3x^2 - 2x - 3y^2 + 8y - 3 \geq 0$$
$$3x^2 + 2x + 3y^2 - 8y + 3 \leq 0$$
$$3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{3} + 3\left(y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{16}{9}\right) - \frac{16}{3} + 3 \leq 0$$
$$3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{4}{3}\right)^2 \leq \frac{8}{3}$$

або $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{4}{3}\right)^2 \leq \frac{8}{9}$.

Ця умова задає круг радіуса $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ з центром у точці $\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

6. Знайти розв'язок рівняння $(z+a)^n = z^n$ ($n \in N$) і показати, що при дійсному $a \neq 0$ вони лежать на прямій, що паралельна уявній осі.

● Зазначимо, що при $a = 0$ коренем даного рівняння є будь-яке комплексне число, і розв'язуватимемо його для $a \neq 0$.

В цьому випадку число $z = 0$ не є розв'язком рівняння. Отже,

$$(z+a)^n = z^n \Rightarrow \left(\frac{z+a}{z}\right)^n = 1.$$

Оскільки всі корені n-го степеня із одиниці визначаються за формулою

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \; k = 0, n-1,$$

то рівняння $\left(1+\frac{a}{z}\right)^n = 1$ має рівно $n-1$ розв'язок $z_k \left(k = \overline{1, n-1}\right)$, причому

$$1 + \frac{a}{z_k} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Після елементарних перетворень дістанемо:

$$z_k = -\frac{a}{2}\left[1 + i\,\mathrm{ctg}\frac{k\pi}{n}\right]\left(k = \overline{1, n-1}\right).$$

Якщо a дійсне, то розв'язки лежать на прямій $x = -\frac{a}{2}$, паралельно уявній осі.

Завдання для перевірки знань

1. Спростити вираз:

1) $\frac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}$ ($x \in R$). 2) $\frac{z^2 - iz - 1}{2iz}$, якщо $z = e^{i\theta}$.

2. Довести тотожності:

1) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$.

2) $|z_1+z_2|+|z_1-z_2|=\left|z_1+\sqrt{z_1^2-z_2^2}\right|+\left|z_1-\sqrt{z_1^2-z_2^2}\right|$.

3) $\left|1-\bar{z}_1 z_2\right|^2-|z_1-z_2|^2=(1+|z_1\cdot z_2|)^2-(|z_1|+|z_2|)^2$.

3. Знайти тригонометричну форму комплексного числа

$$z=1+i\operatorname{tg}\alpha,$$

де $-\pi<\alpha<\pi$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$.

4. Довести, що точки z_1, z_2, z_3 лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

5. Знайти множину всіх розв'язків рівняння

$$\log_5(2+|1+iz|)+\log_{125}\frac{1}{\left(2+|1-iz|^3\right)}=0.$$

6. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} z^3+\omega^5=0 \\ z^2\cdot\bar{\omega}^4=1 \end{cases}.$$

7. Знайти множину точок z в комплексній площині, що задовольняють такі відношення:

1) $|z-a|=R$.

Відповідь. Коло.

2) $\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z=1$.

Відповідь. Пряма $x+y=1$.

3) $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=1$.

Відповідь. Дійсна вісь.

4) $\operatorname{Re}\left(z^2-\bar{z}\right)=0$.

Відповідь. Гіпербола.

8. Знайти модуль і аргумент таких комплексних чисел:

1) i.

Відповідь. 1, $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

2) -3.

Відповідь. 3, $(2k+1)\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

3) $1+i^{123}$.

Відповідь. $\sqrt{2}$, $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

4) $\frac{1-i}{1+i}$.

Відповідь. 1, $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5) $-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

Відповідь. 1, $\frac{6\pi}{7}+2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

6) $(-4+3i)^3$.

Відповідь. 125, $\frac{\pi}{2}+3\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

7) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$.

Відповідь. $\frac{1}{4}$, $2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

8) $1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

Відповідь. $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{14}$, $\frac{\pi}{14}+2k\pi$.

9. Знайти всі розв'язки рівнянь:

1) $z^2 = i$; 2) $z^2 = 3 - 4i$;

3) $z^8 = 1 + i$; 4) $|z| - z = 1 + 2i$;

5) $\bar{z} = z^3$; 6) $z^6 = 64$.

10. Показати, що корені квадратного рівняння $az^2 + bz + c = 0$ з дійсними a, b, c і від'ємним дискримінантом утворюють пару взаємно спряжених чисел.