

Série 15 (récurrents et arithmétique)

Exercice N°1 :

En mathématique, les nombres de Catalan forment une suite d'entiers naturels utilisée dans divers problèmes de dénombrement. Cette suite est définie comme suit :

$$C \left| \begin{array}{l} C_0 = 1 \\ C_{n+1} = \frac{4 \cdot n + 2}{n + 2} * C_n \\ C_{n+1} = \frac{4 \cdot n + 2}{n + 2} * C_n \end{array} \right. \quad \text{Pour tout } n \geq 0$$

Travail demandé :

- 1- Quel est l'ordre de récurrence de cette suite ? Justifier votre réponse.
- 2- Écrire un algorithme d'une fonction récursive qui retourne C_n en appliquant la formule donnée ci-dessus.
- 3- On se propose de calculer, pour chaque nombre de Catalan :
 - a. Le nombre de ses chiffres.
 - b. Le nombre de ses diviseurs premiers.
 - c. Le nombre de ses diviseurs.

Les résultats calculés seront stockés dans une matrice M de **4 Lignes * N Colonnes** de la manière suivante :

Si on a **N=9** dans une matrice M on stocke les 9 premiers nombres de Catalan comme suit :

M	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	Les nombres de Catalan
	1	1	1	1	2	2	3	3	4	Le nombre de ses chiffres
	0	0	1	1	2	3	4	3	4	Le nombre de ses diviseurs premiers
	1	1	2	2	4	8	12	8	16	Le nombre de ses diviseurs

Ecrire l'algorithme d'un module, qui permet de remplir la matrice M de **4 Lignes * N Colonnes**.

Exercice N°2 :

Pour vérifier la divisibilité d'un nombre **N** par un entier **D**, on fera recours à la technique du **ruban de Pascal**. On peut suivre les étapes suivantes :

- **Étape 1 : Calculer le Ruban de Pascal relatif à l'entier D**

Un ruban **R** relatif à un diviseur **D** se calcule en concaténant les restes distincts de la division entière **10n** par **D**. Cela veut dire, qu'on répète le calcul de **10n mod D** jusqu'à avoir un reste qui existe déjà dans le ruban et sans le prendre en considération.

Exemple :

Le calcul du ruban **R** de l'entier **D = 7** :

100 mod 7 = 1	R="1"
101 mod 7 = 3	R="31"

102 mod 7 = 2	R="231"
103 mod 7 = 6	R="6231"
104 mod 7 = 4	R="46231"
105 mod 7 = 5	R="546231"
106 mod 7 = 1	1 existe déjà Arrêt de calcul

Donc le ruban de Pascal pour le diviseur 7 sera : **R="546231"**

- **Étape 2 : Ajuster le ruban R avec le nombre N**

Pour ajuster le ruban **R** avec le nombre **N**, on modifie le ruban **R** pour qu'il soit de même longueur que **N**.

- ☐ Si **N** contient un nombre de chiffres supérieur à la longueur de **R** on ajoute les mêmes caractères du ruban **R** à gauche jusqu'à obtenir une même longueur.
- ☐ Si **N** contient un nombre de chiffres inférieur à la longueur de **R** on retranche des caractères du ruban **R** à partir de la gauche pour obtenir la même longueur.

N="7296419750389" et R="546231" Ajustement du ruban R avec N tout en ajoutant des chiffres à gauche N="7296419750389" R="1546231546231"	N="875" et R="546231" Ajustement du ruban R avec N tout en retranchant des chiffres à gauche. N="875" R="231"
--	--

- **Étape 3 :** Calculer la somme des produits de chaque chiffre de **N** (**N[i]**) par le chiffre ayant le même indice du ruban **R** (**R[i]**)

$$S=7*1+2*5+9*4+6*6+4*2+1*3+9*1+7*5+5*4+0*6+3*2+8*3+9*1=203$$

- **Étape 4 :** Répéter les étapes 2. et 3. sur les sommes trouvées, jusqu'à avoir un nombre **stationnaire** (constant), Si ce nombre stationnaire vaut **D** donc **N** est divisible par **D**.

On recommence avec "203" **N="203"** et **R="231"** $S = 2*2 + 0*3 + 3*1 = 7$

On recommence avec 7 **N="7"** et **R="1"** $S=7*1=7$

On arrête le calcul puisque la somme **S** devient stationnaire. Et puisque **S = 7 = D**

Donc le nombre **N = "7296419750389"** est divisible par **D**.

Soit un fichier texte situé sur la racine **C:** et intitulé "**Nombres.txt**" dont chaque ligne comporte deux chaînes **chN** et **chD** séparées par deux points ayant le format suivant **chN:chD** ; sachant que :

- ☐ **chN** est une chaîne contenant que des chiffres et de longueur minimale 20
- ☐ **chD** est une chaîne contenant un nombre premier strictement supérieur à 5.

On se propose d'écrire un programme qui permet de générer, à partir du fichier "**Nombres.txt**", un fichier intitulé "**C:\Divisibles.dat**" contenant autant d'enregistrement que le fichier "**Nombres.txt**" contient des lignes.

Chaque enregistrement comporte quatre champs :

- La chaîne **chN**
- Le nombre **D** qui représente l'entier équivalent à la chaîne **chD**,
- Une chaîne **R** qui représente le **Ruban relatif** à l'entier **D**,
- Un champ booléen **Divise** qui aura la valeur **Vrai** lorsque le nombre **N** est divisible par **D** ou la valeur **Faux** dans le cas contraire.

Travail demandé :

- Déterminer le ruban de Pascal associé au diviseur **D=13**.
- Écrire l'algorithme d'un module qui permet de remplir et afficher "**Diviser.dat**", à partir du fichier "**Nombres.txt**". (Écrire les algorithmes des sous modules utilisés s'ils existent)

N.B. : Le candidat n'est pas appelé à remplir le fichier "**Nombres.txt**"