

CONTROLE N° 1

Exercice 1 :

Soit l'équation différentielle du premier ordre :

$$(E) \quad y' = f(t, y)$$

On cherche à construire une solution approchée de (E) sur un intervalle $[a, b]$.

- 1- Définir la méthode d'Euler de résolution numérique de l'équation (E).
- 2- Donner l'interprétation graphique de cette méthode.

Exercice 2 :

- 1- Calculer le polynôme $p(x)$ de Lagrange qui interpole la fonction $f(x) = \frac{4}{x}$ aux points d'abscisse $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4$. Tracer les graphes de $f(x)$ et $p(x)$ pour $x \in [1, 4]$.
- 2- Soit $\varepsilon(x) = f(x) - p(x)$ l'erreur d'interpolation. Calculer la dérivée $\varepsilon'(x)$ et montrer que l'erreur $\varepsilon(x)$ prend sa valeur maximale en un unique point x^* dans l'intervalle $[2, 4]$. Appliquer la méthode de dichotomie à $\varepsilon'(x) = 0$ en effectuant 5 itérations.
- 3- Comparer la fonction $\varepsilon(x)$ avec l'erreur théorique $\varepsilon^{\text{théorique}}(x)$.

Exercice 3 :

On considère l'intégrale

$$I = \int_1^2 \ln(x) dx$$

- 1- Évaluer numériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes composite avec $n=4$ sous-intervalles et comparer le résultat ainsi obtenu avec la valeur exacte.
- 2- Pourquoi la valeur numérique est-elle inférieure à la valeur exacte ?

Exercice 4 :

- 1- Soit $0 < \alpha \leq 1$ un nombre réel donné et soit $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ trois nombres réels.

Considérons la formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \cong \omega_1 g(-\alpha) + \omega_2 g(0) + \omega_3 g(\alpha)$$

Calculer $\alpha, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ pour que le degré d'exactitude de la formule de quadrature soit de 5.

- 2- A l'aide d'un changement de variable affine, en déduire une formule de quadrature pour l'intégrale

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$$

- 3- Soit $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 0, \dots, n$. On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de largeur h . En déduire la formule de quadrature composite pour le calcul approché de



Faculté des Sciences et Techniques



Université Hassan 1^{er} - Settat

$$\int_a^b f(x)dx$$

Solutions

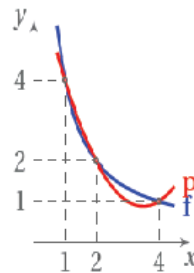
Exercice 2 :

Exercice 2.16

1. Calculer le polynôme p de LAGRANGE qui interpole la fonction $f(x) = \frac{4}{x}$ aux points d'abscisse $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ et $x_2 = 4$. Esquisser les graphes de f et de p pour $x \in [1, 4]$.
2. Vérifier que l'erreur $\varepsilon(x) \equiv f(x) - p(x)$ prend sa valeur maximale en un unique point $\tilde{x}$ dans l'intervalle $[2, 4]$. Calculer ensuite $\tilde{x}$ à 10^{-1} près (on pourra utiliser la méthode de dichotomie).
3. Comparer la fonction ε avec l'estimation théorique de l'erreur.

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.16.

1. f est une hyperbole et p est la parabole qui passe par les points $(1, 4)$, $(2, 2)$ et $(4, 1)$: $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 7$



2. On a $\varepsilon(x) \equiv f(x) - p(x) = \frac{4}{x} - 7 + \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}x^2$. Comme $\varepsilon'(x) = \frac{7}{2} - x - \frac{4}{x^2}$, il s'agit de trouver $\tilde{x}$ tel que $\varepsilon'(x) = 0$. Une simple comparaison des graphes des fonctions $u: x \mapsto \frac{7}{2} - x$ et $v: x \mapsto \frac{4}{x^2}$ montre que $\varepsilon'(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[1, 2]$ et une solution dans l'intervalle $[2, 4]$ (en effet, $\varepsilon'(1) = u(1) - v(1) = 2.5 - 4 < 0$, $\varepsilon'(2) = u(2) - v(2) = 1.5 - 1 > 0$ et $\varepsilon'(4) = u(4) - v(4) < 0$). On a $\varepsilon''(x) = -1 + 8/x^3$: l'erreur étant convexe pour $x < 2$ et concave pour $x > 2$, on conclut qu'elle prend sa valeur maximale pour $x = \tilde{x} \in [2, 4]$. On cherche alors $\tilde{x} \in [2, 4]$ tel que $\varepsilon'(\tilde{x}) = 0$ par la méthode de dichotomie. Pour que l'erreur soit inférieure à 10^{-1} , il faut $E\left(\log_2\left(\frac{4-2}{10^{-1}}\right)\right) + 1 = E(2\log_2(2) + \log_2(5)) + 1 = 5$ étapes :

k	0	1	2	3	4	5
$[a_k, b_k]$	$[2, 4]$	$[3, 4]$	$[3, \frac{7}{2}]$	$[3, \frac{13}{4}]$	$[3, \frac{25}{8}]$	$[\frac{49}{16}, \frac{25}{8}]$
ℓ_k	3	$\frac{7}{2}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{49}{16}$	$\frac{99}{32}$
$b_k - a_k$	$2 > 10^{-1}$	$1 > 10^{-1}$	$0.5 > 10^{-1}$	$0.25 > 10^{-1}$	$0.125 > 10^{-1}$	$0.0625 < 10^{-1}$

L'erreur prend sa valeur maximale pour $\tilde{x} \approx \frac{99}{32} = 3.09375$ et vaut $\varepsilon(\tilde{x}) \approx 0.01166653913$.

3. Comparons ce résultat avec l'estimation théorique de l'erreur. $n = 2$ et f est de classe $\mathcal{C}^\infty([1, 4])$, donc pour tout $x \in [1, 2]$ il existe $\xi_x \in [1, 4]$ tel que

$$\varepsilon^{\text{théorique}}(x) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x-1)(x-2)(x-4) = -\frac{3}{\xi_x^4}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8).$$

Comme $\varepsilon(x) = \frac{4}{x} - 7 + \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}x^2$, on obtient $\varepsilon^{\text{théorique}} = \varepsilon$ ssi $\xi_x = \sqrt[4]{6x}$.

Exercice 3 :

Exercice 3.5

On considère l'intégrale

$$I = \int_1^2 \ln(x) dx.$$

1. Évaluer numériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes composite avec $m = 4$ sous-intervalles et comparer le résultat ainsi obtenu avec la valeur exacte. Pourquoi la valeur numérique est-elle inférieure à la valeur exacte ? Est-ce vrai quel que soit m ? (Justifier la réponse.)

CORRECTION DE L'EXERCICE 3.5.

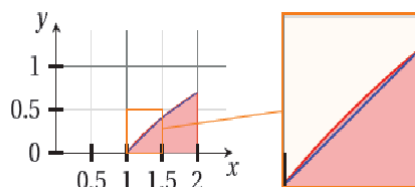
1. La méthode des trapèzes composite à $m + 1$ points (m sous-intervalles) pour calculer l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ s'écrit

$$\int_a^b f(t) dt \simeq h \left(\frac{1}{2} f(a) + \sum_{i=1}^{m-1} f(a + ih) + \frac{1}{2} f(b) \right) \quad \text{avec } h = \frac{b-a}{m}.$$

Ici on a $f(x) = \ln(x)$, $a = 1$, $b = 2$, $m = 4$ d'où $h = \frac{1}{4}$ et on obtient

$$I \simeq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) + \frac{1}{2} f(2) \right) = \frac{1}{4} \left(\ln\left(\frac{5}{4}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{7}{4}\right) + \frac{1}{2} \ln(2) \right) \approx 0.3836995094.$$

Une primitive de $\ln(x)$ est $F(x) = x(\ln(x) - 1)$. La valeur exacte est alors $I = [x(\ln(x) - 1)]_{x=1}^{x=2} = 2\ln(2) - 1 \approx 0.386294361$. La valeur numérique obtenue est inférieure à celle exacte quelque soit le pas h choisi car la fonction f est concave, ce qui signifie qu'une corde définie par deux points de la courbe $y = \ln(x)$ sera toujours en-dessous de la courbe, donc l'aire sous les trapèzes sera inférieure à l'aire exacte. Pour bien visualiser la construction considérons $m = 2$:



Exercice 3.13

1. Soit $0 < \alpha \leq 1$ un nombre réel donné et soit $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ trois nombres réels. Considérons la formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx \omega_1 g(-\alpha) + \omega_2 g(0) + \omega_3 g(\alpha).$$

Calculer $\alpha, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ pour que le degré d'exactitude de la formule de quadrature soit de 5.

2. À l'aide d'un changement de variable affine, en déduire une formule de quadrature pour l'intégrale

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx.$$

3. Soit $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 0, \dots, n$. On subdivise l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles $[x_i; x_{i+1}]$ de largeur h . En déduire la formule de quadrature composite pour le calcul approché de

$$\int_a^b f(x) dx.$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 3.13.

1. On a

k	$p_k(x) = x^k$	$\int_{-1}^1 p_k(x) dx$	$\omega_1 p_k(-\alpha) + \omega_2 p_k(0) + \omega_3 p_k(\alpha)$
0	1	2	$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$
Soit $\omega_2 = 2 - \omega_1 - \omega_3$			
1	x	0	$-\alpha\omega_1 + \alpha\omega_3$
Soit $\omega_3 = \omega_1$ et donc $\omega_2 = 2 - 2\omega_1$			
2	x^2	$\frac{2}{3}$	$2\alpha^2\omega_1$
Soit $\omega_1 = \frac{1}{3\alpha^2}$ et donc $\omega_3 = \frac{1}{3\alpha^2}$ et $\omega_2 = 2 - \frac{2}{3\alpha^2}$			
3	x^3	0	0
4	x^4	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}\alpha^2$
Soit $\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$ et donc $\omega_1 = \omega_3 = \frac{5}{9}$ et $\omega_2 = \frac{8}{9}$			
5	x^5	0	0
6	x^6	$\frac{2}{7}$	$\frac{6}{25}$

Si $\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$, $\omega_1 = \omega_3 = \frac{5}{9}$ et $\omega_2 = \frac{8}{9}$ alors la formule est exacte pour les polynômes de degré au plus 5 (il s'agit de la formule de GAUSS-LEGENDRE à 3 points).

Remarquons que si on choisit $\alpha = 1$ on retrouve la formule de SIMPSON.

2. Soit $x = mt + q$, alors

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = m \int_{-1}^1 f(mt + q) dt \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_i = -m + q, \\ x_{i+1} = m + q, \end{cases}$$

d'où le changement de variable $x = x_i + (t+1)\frac{x_{i+1}-x_i}{2}$. On déduit la formule de quadrature (exacte sur l'espace des polynôme de degré au plus 5)

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx &= \frac{x_{i+1}-x_i}{2} \int_{-1}^1 f\left(x_i + (t+1)\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right) dt \\ &\approx \frac{x_{i+1}-x_i}{18} \left[5f\left(x_i + \left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right) + 8f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) + 5f\left(x_i + \left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right) \right].\end{aligned}$$

3. $h = \frac{b-a}{n} = x_{i+1} - x_i$ pour $i = 0, \dots, n$. On subdivise l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles $[x_i; x_{i+1}]$ de largeur h . On trouve ainsi la formule de quadrature composite

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{18} \left[5f\left(x_i + \left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right) + 8f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) + 5f\left(x_i + \left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right) \right] \\ &= \frac{h}{18} \sum_{i=0}^{n-1} \left[5f\left(x_i + \left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)h\right) + 8f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + 5f\left(x_i + \left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)h\right) \right] \\ &= \frac{h}{18} \sum_{i=0}^{n-1} \left[5f\left(a + \left(i+1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)h\right) + 8f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h\right) + 5f\left(a + \left(i+1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)h\right) \right].\end{aligned}$$