Дисциплина: ОД.07 Математика
Занятие № 61 **Группа ТТГ 1/1-9/25** **Дата: 15.01.2026**
Тип занятия: лекция 34 **Преподаватель:** Бережная В.А.
Тема занятия: Основные тригонометрические тождества.

Цель занятия:
Деятельностная:
– создать условия для сознательного усвоения учащимися свойств и действий с тригонометрическими функциями произвольного угла.
Содержательная:
– актуализировать знания о тригонометрии: синус, косинус, тангенс, котангенс;
– расширить знания учеников за счет включения новых определений: тригонометрические тождества;
– познакомиться с задачами на тригонометрические тождества.
План занятия:
1. Тригонометрические тождества.
2. Синус, косинус, тангенс и котангенс углов α и - α.
3. Формулы приведения.

1. Тригонометрические тождества.

Основное тригонометрическое тождество

Изучим треугольник AOB. Он прямоугольный, а потому для него можно записать теорему Пифагора:

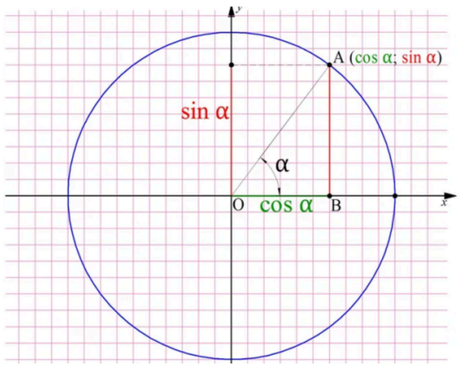
$$AB^2 + OB^2 = OA^2$$

Мы рассматриваем единичную окружность, а потому

OA = 1, OB = cosα, AB = sinα.

Подставив эти величины в равенство, получим тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$



Его называют основным тригонометрическим тождеством, ведь именно оно связывает значение двух прямых тригонометрических ф-ций – синуса и косинуса.

Пример

Задание 1. В прямоугольном треугольнике есть угол α. Известно, что sin α = 0,8. Чему равен cosα?

Решение.

Подставим в основное тригон-кое тождество значение sinα = 0,8 и получим уравнение:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$0{,}8^2 + \cos^2\alpha = 1$

$0{,}64 + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 – 0{,}64 = 0{,}36$

$\cos\alpha = \pm\, 0{,}6$

Нашли два возможных значения косинуса. Но по условию α – это острый угол, ведь в прямоугольном треугольнике угол не может быть больше 90°. То есть угол α относится к первой четверти, а потому его косинус положителен. Значит, cosα = 0,6.

Ответ: 0,6.

Задание 2. Вычислите sinα, если cosα = 0,28 и α принадлежит IV четверти.

Решение.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$0{,}28^2 + \sin^2\alpha = 1$

$0{,}0784 + \sin^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = 1 – 0{,}0784 = 0{,}9216$

$\sin\alpha = \pm 0{,}96$

Так как α принадлежит IV четверти, то sinα должен быть отрицательным, поэтому sinα = – 0,96.

Напомним, что в IV четверти значение косинуса положительно, ведь соответствующая ей дуга единичной окружности располагается правее оси Оу, то есть абсциссы точек, принадлежащих ей, положительны.

Ответ: – 0,96.

Задание 3. Найдите tgα, если sinα = 5/13 и π/2 < α < π.

Решение.

Здесь задача уже в два действия!

Сначала определим cosα:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 – \sin^2\alpha = 1 – (5/13)^2 = 169/169 – 25/169 = 144/169$

cosα = ± 12/13

Условие π/2 < α < π указывает на то, что угол относится ко II четверти, в которой косинус отрицателен, поэтому cosα = – 12/13.

Далее находим тангенс, просто деля синус на косинус:

tgα = sinα:cosα = (5/13):(12/13) = (5/13)•(13/12) = 5/12

Ответ: 5/12

Связь синуса, косинуса, тангенса и котангенса

Запишем тождество

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Далее поделим его на величину $\cos^2\alpha$:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Крайнее левое слагаемое – это величина $\mathrm{tg}^2\alpha$, а следующая дробь равна единице, так как у неё совпадают числитель и знаменатель:

$$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

В итоге нам удалось получить ф-лу, которая связывает значение тангенса и косинуса угла. Есть такая формула и для котангенса. Для ее получения необходимо поделить основное тригон-кое тождество на $\sin^2\alpha$:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$1 + \text{ctg}^2\, \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \mathbf{tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}} \\ \mathbf{ctg^2\, \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}} \end{gathered}}$$

Пример

Задание. Известно, что tgα = 0,75. Найдите cosα и sinα, если угол α принадлежит III четверти. Решение. Просто подставляем в ф-лу известное значение тангенса и решаем получившееся уравнение. Для простоты вычислении заменим десятичную дробь 0,75 на обычную 3/4:

$$\text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$0{,}75^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16}$$

$$\cos^2 \alpha = 16/25$$

$$\cos \alpha = 4/5 \text{ или } \cos \alpha = -\,4/5$$

$$\cos \alpha = 0{,}8 \text{ или } \cos \alpha = -\,0{,}8.$$

Так как угол относится к III четверти, где косинус отрицателен, то

cosα = – 0,8

Синус угла найдем, используя основное тригон-кое тождество:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - (-\,0{,}8)^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$

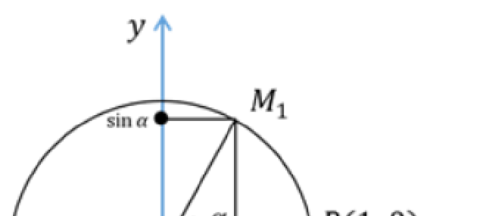
sinα = ± 0,6

С учетом того, что в III четверти синус становится отрицательным, следует выбрать вариант sinα = – 0,6

Ответ: sinα = – 0,6; cosα = – 0,8.

2. Синус, косинус, тангенс и котангенс углов α и - α.

Итак, пусть на координатной плоскости изображена единичная окружность с центром в начале координат. Точка P(1;0) совершает поворот против часовой стрелки



на угол α и оказывается в точке M_1. По определению синуса и косинуса можем сказать, что абсцисса точки M_1 равна cosα, а ордината – sinα. Затем точка совершает поворот на угол –α, противоположный углу α, и оказывается в точке M_2.

Тогда абсцисса точки M_2 равна cos(–α), а ордината равна sin(–α)? Верно.

Посмотрите на угол M_1OM_2. Ось Ох делит его пополам, а значит, точки M_1 и M_2 симметричны относительно оси Ох. Тогда абсциссы этих точек совпадают, а ординаты имеют противоположные значения, то есть можем записать, что:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

Сразу отметим, что формулы справедливы при любых значениях α.

А что можно сказать про **тангенс** противоположных углов?

По определению тангенса угла можем записать, что

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}$$

Числитель запишем как sin(–α) = – sinα, по формуле знаменатель запишем как cos(–α) = cosα. Таким образом, мы получили, что:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

Отметим, что здесь $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, так как ранее мы с вами говорили, что тангенс этих углов не определён.

Как быть с **котангенсом** противоположных углов?

По определению котангенса угла запишем:

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)}$$

Числитель запишем как cos(–α) = cosα, по формуле знаменатель запишем как sin(–α) = – sinα. Таким образом, получили, что

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

Здесь $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, так как котангенс этих углов не определён.

Пример

1. Вычислите: $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$, $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\frac{3\pi}{2} = -(-1) = 1$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2. Вычислите:

а) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\text{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{4}-\text{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6};$

б) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+3\,\text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}-3\,\text{tg}\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-3\cdot 1=-3$

в) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)+3\cos\pi+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\left(-\text{tg}\frac{\pi}{6}\right)+3\cos\pi+\cos\frac{\pi}{3}=$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+3\cdot(-1)+\frac{1}{2}=\frac{3}{6}-3+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-3+\frac{1}{2}=1-3=-2;$

3. Упростим выражение

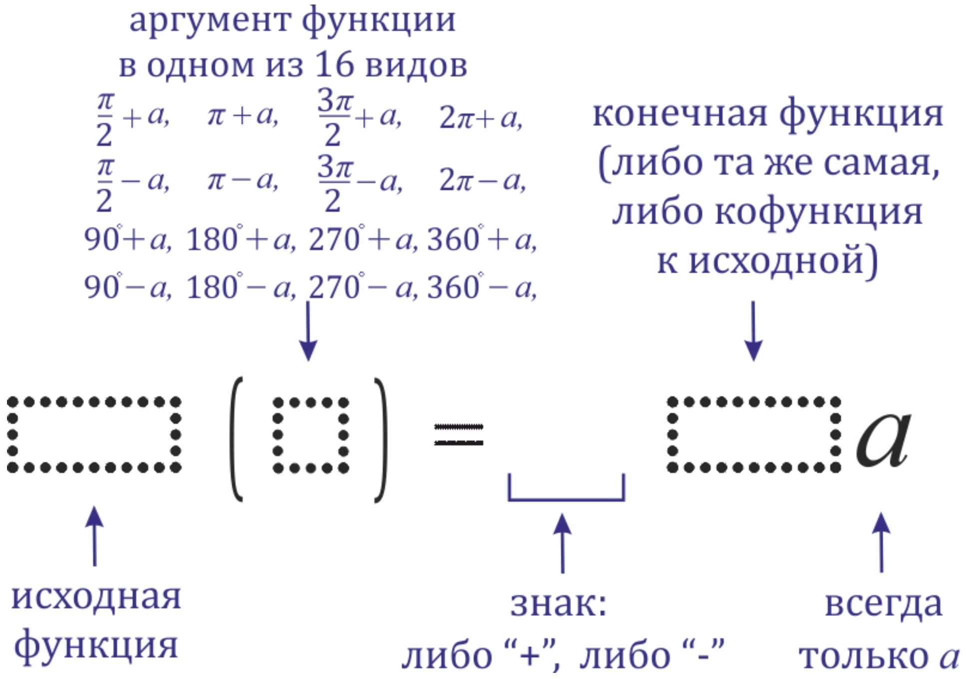
$\sin\alpha+tg(-\alpha)\cos(-\alpha)=\sin\alpha-tg\alpha\cos\alpha=\sin\alpha-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\alpha=\sin\alpha-\sin\alpha=0.$

3. Формулы приведения.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\cos a$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\sin a$ $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\text{ctg}\,a$ $\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\text{tg}\,a$	$\sin(\pi+a)=-\sin a$ $\cos(\pi+a)=-\cos a$ $\text{tg}\,(\pi+a)=\text{tg}\,a$ $\text{ctg}\,(\pi+a)=\text{ctg}\,a$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\cos a$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=\sin a$ $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\text{ctg}\,a$ $\text{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\text{tg}\,a$	$\sin(2\pi+a)=\sin a$ $\cos(2\pi+a)=\cos a$ $\text{tg}\,(2\pi+a)=\text{tg}\,a$ $\text{ctg}\,(2\pi+a)=\text{ctg}\,a$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos a$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin a$ $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\text{ctg}\,a$ $\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\text{tg}\,a$	$\sin(\pi-a)=\sin a$ $\cos(\pi-a)=-\cos a$ $\text{tg}\,(\pi-a)=-\text{tg}\,a$ $\text{ctg}\,(\pi-a)=-\text{ctg}\,a$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=-\cos a$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=-\sin a$ $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=\text{ctg}\,a$ $\text{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=\text{tg}\,a$	$\sin(2\pi-a)=-\sin a$ $\cos(2\pi-a)=\cos a$ $\text{tg}\,(2\pi-a)=-\text{tg}\,a$ $\text{ctg}\,(2\pi-a)=-\text{ctg}\,a$

Для начала обратите внимание, что все формулы имеют похожий вид:



Какой знак был у исходной функции в исходной четверти, такой знак и нужно ставить перед конечной функцией.

Пример

$$\frac{18\cos 41^\circ}{\sin 49^\circ} = \frac{18\cos 41^\circ}{\sin(90^\circ - 41^\circ)} = \frac{18\cos 41^\circ}{\cos 41^\circ} = 18$$

$$\frac{3\sin(\pi - a) - \cos(\frac{\pi}{2} + a)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - a)} = \frac{3\sin a - \cos(\frac{\pi}{2} + a)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - a)} = \frac{3\sin a - (-\sin a)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - a)} =$$

$$= \frac{3\sin a - (-\sin a)}{-\sin a} = \frac{3\sin a + \sin a}{-\sin a} = \frac{4\sin a}{-\sin a} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$ctg(-a - \frac{7\pi}{2}) = ctg(-\frac{7\pi}{2} - a) = ctg(-(\frac{7\pi}{2} + a)) = -ctg(\frac{7\pi}{2} + a) =$$

$$-(-tg\, a) = tg\, a = 2$$

$$sin\frac{7\pi}{6} = sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$cos\frac{7\pi}{6} = cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$tg\frac{7\pi}{6} = tg\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$ctg\frac{7\pi}{6} = ctg\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = ctg\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

$$\sin 405^\circ = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{ctg} 120^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg} 120^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{ctg} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

1.1. Сформулируйте тригонометрические тождества.

1.2. Как связаны синус, косинус, тангенс и котангенс углов α и - α.

1.3. Сформулируйте формулы приведения.

2. Решите предложенные задания (письменно):

2.1. С помощью формул приведения сделать угол меньше 90°:

А) sin200°=sin(180°+...)=

Б) cos135°=cos(90°+...)=

В) sin111°=sin(180° –...)=

Г) sin175°=sin(90°+...)=

Д) cos95°=cos(180° –...)=

Е) cos73°=cos(90° –...)=

2.2. Найдите значение выражения:

А) $\dfrac{\cos(2\pi-\beta)+2\sin(-3\frac{\pi}{2}+\beta)}{2\cos(\beta+2\pi)}$

Б) $\dfrac{2\cos(\pi-\beta)-\sin(-\frac{\pi}{2}+\beta)}{\cos(\beta-\pi)}$

Отчетность

Работы принимаются до 22 января 2026 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:

ОД.07 Математика 15.01.25 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 15.01.25 (Иванов Иван, ТТГ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате:

https://t.me/+leGPsDn5EF8yMGIy

С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.