Κούφιες σφαίρες…

1)Μας έδωσαν δύο σφαίρες με κοιλότητες σφαιρικές κέντρου ίδιου με των σφαιρών, ίδιας μάζας και εξωτερικής ακτίνας η μία από σίδηρο (σ) και η άλλη από αλουμίνιο (α), όμως είναι βαμμένες με ίδιο χρώμα και μας είπαν να βρούμε ποια είναι ποια παρατηρώντας την κάθοδό τους σε κεκλιμένο, αφού τις αφήσουμε από το ίδιο ύψος. Να θεωρήσετε ότι οι σφαίρες κυλίονται (χωρίς ολίσθηση) και να θεωρήσετε γνωστό ότι για τις πυκνότητες των υλικών ισχύει $\rho_\sigma > \rho_\alpha$. Πως τα καταφέραμε;

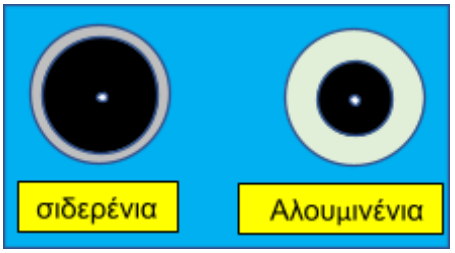
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Κατ'αρχάς θα δούμε πως είναι κατανεμημένη η μάζα των σφαιρών καθ'όσον αυτό παίζει ρόλο για την ροπή αδράνειας τους η οποία όπως θα δούμε επηρεάζει την κάθοδό τους. Γνωρίζουμε από τον ορισμό της πυκνότητας ότι:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} \xrightarrow{\rho_\sigma > \rho_\alpha} V_\sigma < V_\alpha$$

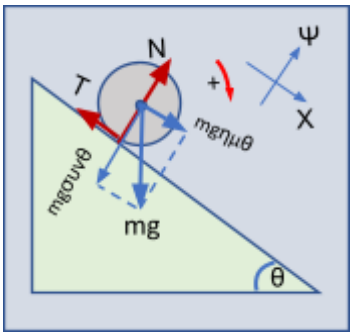
(V ο όγκος του συμπαγούς υλικού)

Σχεδιάζω τις δυο σφαίρες και επειδή ο όγκος του υλικού στη σιδερένια είναι μικρότερος, η κοιλότητα θα είναι μεγαλύτερη στη σιδερένια, δηλαδή το υλικό του σιδήρου θα είναι κατανεμημένο σε σχέση με το κέντρο, ποιο μακριά απ'αυτό ,από ότι στην αλουμινένια όπως φαίνεται στη σχηματική παράσταση.



Γνωρίζουμε ότι η ροπή αδράνειας στερεού εξαρτάται από την θέση του άξονα και την κατανομή της μάζας περί τον άξονα. Όσο ποιο μακριά από τον άξονα είναι κατανεμημένη η μάζα τόσο μεγαλύτερη η ροπή αδράνειας με βάση έτον ορισμό $I = \Sigma m_i r_i^2$. Επειδή η μάζα των δύο είναι ίδια έχουμε : $I_\sigma > I_\alpha$

Κατά την κάθοδο με κύλιση ισχύουν:



μεταφορικά: $\Sigma F_x = ma_{cm} \Rightarrow mg\eta\mu\theta - T = ma_{cm} \quad (1)$

στροφικά ως προς τον άξονα από το κέντρο:

$$\Sigma\tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow TR = I\alpha_\gamma \quad (2)$$

Για την κύλιση ισχύει: $\alpha_{cm} = \alpha_\gamma R \Rightarrow a_\gamma = \frac{\alpha_{cm}}{R} \quad (3)$

$$\text{Από την } (2) \xrightarrow{(3)} TR = I\frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow T = I\frac{\alpha_{cm}}{R^2} \quad (4)$$

$$(1)+(4)\Rightarrow mg\eta\mu\theta=\alpha_{cm}\left(m+\frac{I}{R^2}\right)\Rightarrow a_{cm}=\frac{mg\eta\mu\theta}{m+\frac{I}{R^2}}\xrightarrow{m,R\,\text{κοιν}\ \ \&\,I_\sigma>I_\alpha}\alpha_{cm\,\sigma}<\alpha_{cm\,\alpha}$$

Μεταφορικά : $$\Delta x=\frac{1}{2}a_{cm}t^2\Rightarrow t=\sqrt{\frac{2\Delta x}{a_{cm}}}\xrightarrow{a_{cm\,\sigma}<a_{cm\,\alpha}}$$ $t_\sigma > t_a$

Συμπέρασμα: Η σφαίρα που θα φτάσει πρώτη στο τέλος του κεκλιμένου είναι η αλουμινένια.

2) **Πάνω σε τραπέζι με λείο οριζόντιο επίπεδο βρίσκεται ακίνητη σφαίρα ομογενής βάρους W . Σε σημείο Α του οριζόντιου ισημερινού της εφαρμόζω κατάλληλα δύναμη F που παραμένει σταθερή:**

Α) με κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα πάνω και $F\le W$

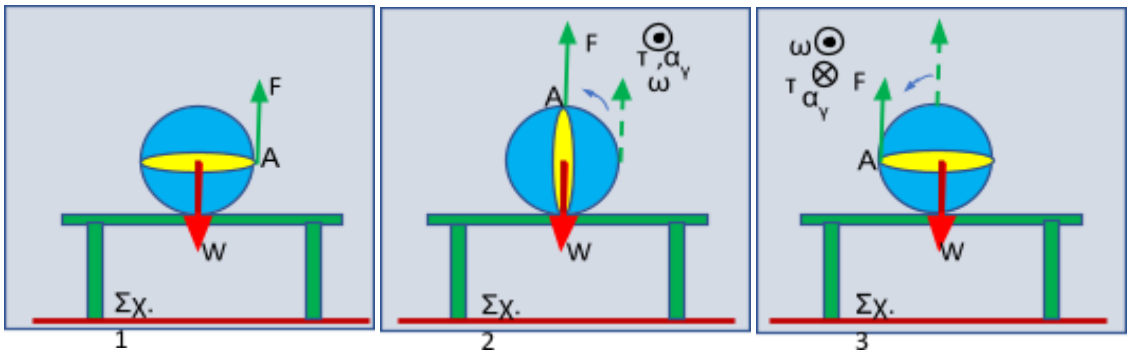
Β) με κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα πάνω και F>W

Γ) με κατεύθυνση πλάγια έτσι ώστε να αναλύεται σε μια κατακόρυφη Fψ=W και μια οριζόντια Fx=F_ψ με διεύθυνση που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας.

Να περιγράψετε τα είδη των κινήσεων σε κάθε περίπτωση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Η F δημιουργεί ροπή ως προς το κέντρο η οποία προκαλεί περιστροφή αριστερόστροφη επιταχυνόμενη, με διαρκώς μικρότερη γωνιακή επιτάχυνση λόγω μείωσης της ροπής, αφού ο μοχλοβραχίονας μειώνεται μέχρι τη στιγμή που η διεύθυνση της F περνά από το κέντρο (η το σημείο εφαρμογής της F φτάνει στο ανώτερο σημείο της σφαίρας σχ2). Μεταφορά δεν συμβαίνει αφού ΣF=0



Στη συνέχεια η κίνηση γίνεται στροφική επιβραδυνόμενη με διαρκώς μεγαλύτερη επιτάχυνση (απολύτως) μέχρι το σημείο Α να έρθει στην αντιδιαμετρική της αρχικής θέσης (σχ3) όπου μηδενίζεται η γωνιακή ταχύτητα και αρχίζει αντίστροφη πορεία με επιταχυνόμενη και μετά επιβραδυνόμενη με τη σφαίρα επανερχόμενη στην αρχική θέση,(σχ.1) κ.ο.κ

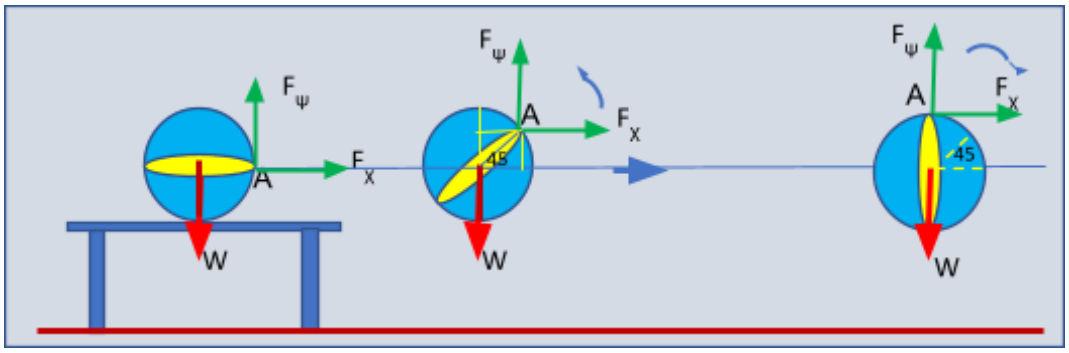
Δηλαδή η σφαίρα εκτελεί μια "στροφική ...ταλάντωση" από 0^0 έως 180^0 περί άξονα οριζόντιο που διέρχεται από το κέντρο και είναι κάθετος στο επίπεδο (F, ακτίνα ισημερινού στο Α) .

Β) Τώρα επειδή F>W η σφαίρα θα κάνει ότι προηγουμένως αλλά συγχρόνως θα μεταφέρεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και επιτάχυνση $\alpha = \frac{F - W}{m}$

Γ) Στην περίπτωση αυτή η σφαίρα εκτελεί τις εξής κινήσεις :

Στον κατακόρυφο άξονα $\Sigma F_{\psi}=0$ και δεν μεταφέρεται.

Στον οριζόντιο άξονα $\Sigma F_{\chi} = ma \Rightarrow F_x = ma \Rightarrow mg = ma \Rightarrow a = g$



Στην έναρξη 1ο σχήμα η F_{ψ} δημιουργεί ροπή ως προς το κέντρο αριστερόστροφη ενώ η F_x διερχόμενη από το κέντρο δεν δημιουργεί ροπή. Ξεκινά λοιπόν περιστροφή αριστερόστροφα επιταχυνόμενη με διαρκώς μικρότερη γωνιακή επιτάχυνση αφού η μεν ροπή της F_{ψ} μειώνεται ενώ η ροπή της F_x αυξάνει με αντίθετη κατεύθυνση δηλαδή η Στ>0 μειώνεται και τη στιγμή που η σφαίρα έχει στραφεί κατά 45^0 η Στ=0, αλλά λόγω της κτηθείσας ω η σφαίρα συνεχίζει της περιστροφή της και η μεν ροπή της F_{ψ} συνεχίζει να μειώνεται ενώ η ροπή της F_x αυξάνει με αντίθετη κατεύθυνση και η Στ<0 τώρα αντιτίθεται στην κίνηση επιβραδύνοντας τη σφαίρα μέχρι τη στιγμή που έχει στραφεί κατά 90^0 όπου μηδενίζεται η ω και αρχίζει η αντίστροφη πορεία…κ.ο.κ

Δηλαδή η σφαίρα εκτελεί μια "στροφική …ταλάντωση" από 0^0 έως 90^0 περί άξονα οριζόντιο που διέρχεται από το κέντρο και είναι κάθετος στο επίπεδο (Fx,Fψ) ενώ συγχρόνως μεταφέρεται οριζόντια επιταχυνόμενος ομαλά

Η βαρύτητα προφανώς έχει εξουδετερωθεί αφού $F_{\psi}=W$ και γιαυτό δεν … πέφτει η σφαίρα από τη στιγμή που χάνει την επαφή της με το τραπέζι !

Μακάρι να πάψουν να πέφτουν "σφαίρες" σε κορμιά ανθρώπων …εκεί, μα και όπου αλλού…

Παντελεήμων Παπαδάκης
24/3/2022