

11. Неравенства

МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Неравенством с одной переменной называется запись, в которой два выражения, содержащие одну и ту же переменную связаны знаками неравенств: $<$, $>$, $\geq$, $\leq$, $\neq$.

Решением неравенства называется такое числовое значение переменной, при подстановке которого в данное неравенство оно становится верным числовым неравенством.

Решить неравенство с переменной - значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Два неравенства с одной переменной называются **равносильными**, если решения этих неравенств совпадают.

Свойства неравенств

1. Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится неравенство, равносильное данному.
 2. Если к обеим частям неравенства с одной переменной прибавить или вычесть одно и то же число, то получится неравенство, равносильное данному.
 3. Если обе части неравенства с одной переменной умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство, равносильное данному.
 4. Если обе части неравенства с одной переменной умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.
-

Линейное неравенство

Линейным неравенством называется неравенство вида $ax > b$ (либо $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$).

Если $a > 0$, то неравенство $ax > 0$ равносильно неравенству $x > b:a$, значит, множество решений неравенства есть промежуток $(b:a; +\infty)$.

Если $a < 0$, то неравенство $ax > b$ равносильно неравенству $x < b:a$, значит, множество решений неравенства есть промежуток $(-\infty; b:a)$.

Если $a = 0$, то неравенство $ax > b$ принимает вид $0x > b$, т.е. оно не имеет решений, если $b \geq 0$, и верно при любых x , если $b < 0$.

Квадратное неравенство

Квадратным неравенством называется неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ (либо $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$), где $a \neq 0$.

Рассмотрим неравенство $ax^2+bx+c>0$. В зависимости от знака дискриминанта $D=b^2-4ac$ могут представиться три случая:

1. $D<0$, график не пересекает ось OX и если $a>0$ лежит выше оси, то решением является $(-\infty; +\infty)$, если $a<0$, то график ниже оси OX и **решений нет**.

2. $D>0$, график пересекает ось OX в двух точках x_1 и x_2 ($x_1<x_2$), служащих корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$. Если $a>0$, то ветви графика направлены вверх и решением является: $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, если $a<0$, то ветви направлены вниз и решением является: $(x_1; x_2)$.

3. $D=0$, график касается оси OX в точке x_1 , которая является корнем уравнения $ax^2+bx+c=0$. Если $a>0$, то ветви графика направлены вверх и решением является: $(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$, если $a<0$, то ветви направлены вниз и решений нет.

Рациональные неравенства

Пусть A и B многочлены от одной и той же переменной. Неравенства вида

$$\frac{A}{B} > 0 \text{ (либо } \frac{A}{B} < 0; \frac{A}{B} \geq 0; \frac{A}{B} \leq 0) \text{ называют рациональными.}$$

Неравенства вида $A:B>0$ и $A*B>0$ ($A:B<0$ и $A*B<0$) равносильны.

Замечание: нестрогие неравенства могут быть и неравносильными.

При решении рациональных неравенств применяют метод интервалов.

Рассмотрим неравенство $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)>0$

Найдем нули функции $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ - числа $x_1, x_2, \dots, x_n$.

В каждом из промежутков, на которые область определения разбивается нулями функции, знак функции сохраняется, а при переходе через нуль её знак изменяется. Отметим нули функции на числовой прямой. Узнаем знаки на каждом промежутке. В ответе укажем только те промежутки, где знак положителен.

Неравенства с модулем

Неравенства с модулем вида $|f(x)| \leq g(x)$ (или $|f(x)| < g(x)$) решаем с помощью системы неравенств:

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x); \end{cases}$$

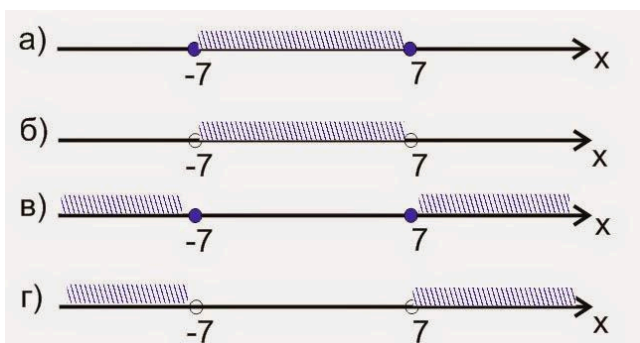
Неравенства с модулем вида $|f(x)| \geq g(x)$ (или $|f(x)| > g(x)$) решаем с помощью системы неравенств:

$$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x); \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Укажите рисунок, на котором изображено множество решений неравенств:

а) $|x| \leq 7$; б) $|x| > 7$.



Решение:

а) Из неравенства $|x| \leq 7$ следует, что $-7 \leq x \leq 7$ и множество решений изображено на рисунке а).

Ответ: а

2. а) Являются ли решениями неравенства $3 - 2(m+6) > -7 + 3(m-4)$ числа 10; 27; 1,5; -3.

б) Являются ли решениями неравенства $n > -6(3-n) + 5(2+n)$ числа -3; 0,9; 0,5; 1?

Решение:

а) Найдем решение для неравенства $3 - 2(m+6) > -7 + 3(m-4)$, для этого раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$3 - 2m - 12 > -7 + 3m - 12;$$

$$-5m > -10;$$

$m < 2$, следовательно решениями неравенства будут все числа, меньшие 2: 1,5 и -3.

Ответ: 1,5; -3.

3. Является ли верным утверждение:

а) $\frac{6}{a} < 3$, если $a > 2$; б) $\frac{6}{a} > 3$, если $a > 2$.

Решение:

а) Умножим обе части неравенства на a , т.к. $a > 2$, то оно положительное, получим: $6 < 3a$; $a > 6:3$; $a > 2$, следовательно утверждение верно.

Ответ: верно

4. При каких значениях x верно неравенство:

а) $(2x-5)^2 \leq 0$; б) $(4x-2)^2 > 0$?

Решение:

а) Рассмотрим неравенство $(2x-5)^2 \leq 0$, квадрат числа не может быть отрицательным числом, следовательно рассмотрим случай, когда $(2x-5)^2 = 0$; $2x-5=0$; $x=2,5$.

Ответ: 2,5

5. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

а) $3x+15 < 5x+2$; б) $3x+4 < 6x+7$.

Решение:

а) $3x+15 < 5x+2$;

$$3x-5x < 2-15;$$

$$-2x < -13;$$

$$x > (-13):(-2);$$

$$x > 6,5.$$

$$x \in (6,5; +\infty)$$

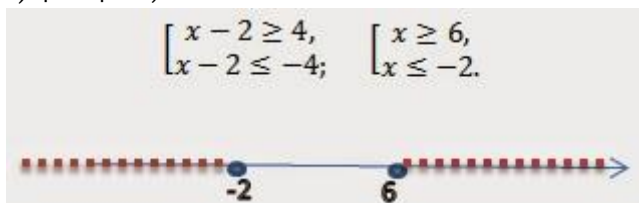
Наименьшее целое число на этом промежутке - 7.
Ответ: 7

6. На координатной прямой изобразите множество решений неравенства:

а) $|x-2| \geq 4$; б) $|x-2| < 6$.

Решение:

а) $|x-2| \geq 4$;



7. Решите неравенство:

а) $5(2-x)-3(x+3)<8$; б) $2(x+1)-2(x+3)>-3$.

Решение:

а) $5(2-x)-3(x+3)<8$;

$10-5x-3x-9<8$;

$-8x<7$;

$x>-7/8$.

Ответ: $(-7/8; +\infty)$

8. Решите неравенство:

а) $3 - \frac{2x-3}{5} + \frac{3x+2}{2} \geq x$; б) $5 - \frac{5x-1}{5} + \frac{x+4}{10} \geq 2x$

Решение:

а) Приведем неравенство к общему знаменателю - 10.

$$3 - \frac{2x-3}{5} + \frac{3x+2}{2} \geq x;$$

$$\frac{30}{10} - \frac{2(2x-3)}{10} + \frac{5(3x+2)}{10} \geq \frac{10x}{10};$$

Умножим обе части неравенства на 10:

$30-4x+6+15x+10 \geq 10x$;

$x \geq -46$;

Ответ: $[-46; +\infty)$

9. Решите неравенство:

а) $\frac{2x-8}{x+3} > 0$; б) $\frac{3x+9}{x-2} < 0$.

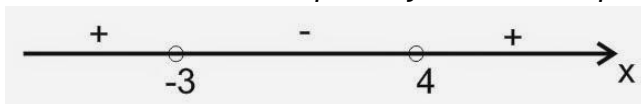
Решение:

а) Рассмотрим функцию $f(x)=(2x-3)/(x+3)$ и найдем значения при которых числитель и знаменатель обращаются в нуль:

$2x-3=0$ и $x+3=0$

$x=1,5$ и $x=-3$.

С помощью метода интервалов решим неравенство:
Решением являются промежутки на которых функция положительна.



Ответ: $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$

10. Решите неравенство:

а) $\frac{2x-4}{3x-9} \leq 0$; б) $\frac{5x-15}{3x+12} \geq 0$.

Решение:

а) Заменим произведением: $(2x-4)(3x-9) \leq 0$.

$2x-4=0$ и $3x-9=0$

$x=2$ $x=3$

С помощью метода интервалов решим неравенство:



Решением являются промежутки на которых функция неотрицательна.

Ответ: $(-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$

11. Решите неравенство:

а) $9x^2-12x+4>0$; б) $5x^2+2x-16\leq 0$.

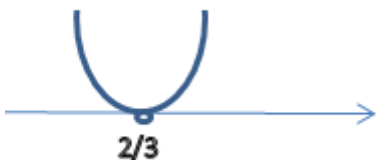
Решение:

а) $9x^2-12x+4>0$ - квадратное неравенство.

$9x^2-12x+4=0$,

$D=144-144=0$.

$x=12:18=2/3$.



Ответ: $(-\infty; 2/3) \cup (2/3; +\infty)$

12. Решите неравенство:

а) $\frac{5^{-1}}{x} > 5$; б) $\frac{4^{-2}}{x} < 16$

Решение:

а)

а) $\frac{5^{-1}}{x} > 5$; $\frac{1}{5x} > 5$; $\frac{1}{5x} - 5 > 0$; $\frac{1-25x}{5x} > 0$.

Заменим произведением: $5x(1-25x)>0$.

$1-25x=0$ или $5x=0$

$x=1/25$ $x=0$



Ответ: (0; 1/25)

13. Решите неравенство:

$$а) \frac{x - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - x} < 0; \quad б) \frac{\sqrt{3} - x}{x + \sqrt{2}} > 0.$$

Решение:

а) Заменим произведением

$$а) \frac{x - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - x} < 0;$$

$$(x - \sqrt{2})(\sqrt{5} - x) < 0.$$

$$x - \sqrt{2} = 0 \text{ или } \sqrt{5} - x = 0;$$

$$x = \sqrt{2} \text{ или } x = \sqrt{5}$$



14. Решите неравенство:

$$а) \frac{x^2 - 16}{x - 4} > 0; \quad б) \frac{25 - x^2}{5 + x} > 0$$

Решение:

а) Заменим произведением $(x^2 - 16)(x - 4) > 0$.

$$x^2 - 16 = 0 \quad x - 4 = 0$$

$$x = 4, x = -4, \quad x = 4$$



Ответ: (-4; 4) union (4; +infinity)

15. Решите неравенство:

$$а) -2 < \frac{3 - 2x}{4} - 3 < 6; \quad б) -4 < 3 + \frac{5 - 4x}{3} < 10.$$

Решение:

$$a) -2 < \frac{3-2x}{4} - 3 < 6;$$

$$-1 < \frac{3-2x}{4} < 9,$$

$$(-1) \cdot 4 < 3 - 2x < 9 \cdot 4;$$

$$-4 - 3 < -2x < 36 - 3;$$

$$-7 : (-2) > x > 33 : (-2);$$

$$-16,5 < x < -3,5.$$

Ответ: $(-16,5; -3,5)$

16. Решите неравенство:

а) $4 < |2x-1| < 10$; б) $3 < |4x+1| < 6$.

Решение:

а)

$$\begin{cases} |2x-1| < 10, \\ |2x-1| > 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1 < 10, \\ 2x-1 > -10, \\ \begin{cases} 2x-1 > 4, \\ 2x-1 < -4; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x < 5,5, \\ x > -4,5, \\ \begin{cases} x > 2,5, \\ x < -1,5. \end{cases} \end{cases}$$



Ответ: $(-4,5; -1,5) \cup (2,5; 5,5)$.

17. Решите неравенство (№ 3.5.33 [7]):

а) $x^2 - 2x + 1 \leq |x-1|$; б) $x^2 + 2x + 1 \geq |x+1|$.

Решение:

а) Рассмотрим две системы неравенств:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x^2 - 2x + 1 \leq x-1; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-1 < 0, \\ x^2 - 2x + 1 \geq -(x-1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 - 2x + 1 - x + 1 \leq 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 1, \\ x^2 - 2x + 1 + x - 1 \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 - 3x + 2 \leq 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 1, \\ x^2 - x \leq 0; \end{cases}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

$$x^2 - x = 0,$$

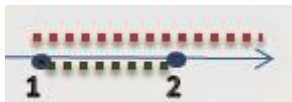
$$x_1 = 2, x_2 = 1$$

$$x(x-1) = 0,$$

$$x = 0, x = 1.$$

Рассмотрим решение первой системы неравенств:

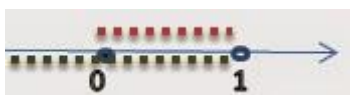
$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 - 3x + 2 \leq 0; \end{cases}$$



ответ: $[1; 2]$

Рассмотрим решение второй системы неравенств:

$$\begin{cases} x < 1, \\ x^2 - x \leq 0; \end{cases}$$



ответ: $[0; 1)$

Объединяя оба ответа получим решение неравенства.

Ответ: $[0; 2]$

18. Найдите наименьшее целое число, которое является решением неравенства:

$$a) (\sqrt{7} - 3)x^2 + 6(\sqrt{7} - 3)x - 7(\sqrt{7} - 3) > 0; \quad б) (\sqrt{15} - 4)x^2 - 7(\sqrt{15} - 4)x - 18(\sqrt{15} - 4) > 0.$$

Решение:

$$a) (\sqrt{7} - 3)x^2 + 6(\sqrt{7} - 3)x - 7(\sqrt{7} - 3) > 0;$$

Разделим обе части не равенства на $(\sqrt{7} - 3)$

Т.к. это выражение меньше 0, то при делении в неравенстве изменим знак на противоположный, получим:

$$x^2 + 6x - 7 < 0,$$

Найдем нули функции: $x_1 = -7$, $x_2 = -1$.

Решением неравенства является промежуток $(-7; -1)$. Наименьшим целым числом, принадлежащим этому промежутку является -6.

Ответ: -6.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Является ли решением неравенства $2x > 3(x-1)$ число 0; 5?

2. Изобразите на координатной прямой промежуток:

а) $[3; 8)$; б) $(-5; 3)$.

3. Решите неравенство:

а) $13+x \geq 8$; б) $14-x < 3$.

4. Решите неравенство:

а) $1 \leq 2-x < 5$; б) $2 \leq x-4 \leq 10$.

5. Решите неравенство:

а) $3x-5(x+4) > 4+x$; б) $5x-4(2x+3) < 3x+8$.

6. Решите неравенство:

а) $3x - \frac{x+1}{3} < \frac{x-1}{4}$; б) $\frac{x+2}{7} - x > \frac{x-2}{4}$

7. Решите неравенство:

$x^2(x-2)(x+1) > 0$.

8. Решите неравенство:

а) $|x-2| < 6$; б) $|x-6| > 4$.

9. Решите неравенство:

а) $\frac{x^2-4x-5}{2x+1} \geq 0$; б) $\frac{-x^2+3x+18}{x-3} > 0$

10. Решите неравенство:

а) $\sqrt{(x-8)^2} \leq 2,5$; б) $\sqrt{(x+10)^2} \geq 3$.