

Método de Gauss

El método de Gauss consiste en transformar el sistema en un sistema escalonado, que es un sistema en el que cada ecuación tiene al menos una incógnita menos que la ecuación anterior.

En lugar de usar las ecuaciones usamos las filas de la matriz del sistema.

Todo lo que se diga para las filas vale para las ecuaciones y viceversa.

Para llegar a un sistema escalonado usamos las siguientes reglas con el propósito de conseguir ceros por debajo de los elementos diagonales de la matriz del sistema:

- 1) Cambiar de orden dos filas
- 2) Eliminar una fila con todo ceros
- 3) Eliminar una fila que sea igual o proporcional a otra
- 4) Multiplicar o dividir una fila por un número distinto de cero
- 5) Sustituir una fila por una combinación lineal de esa fila con otra fila.

El sistema escalonado resultante se resuelve de forma más sencilla empezando a despejar por la ecuación que tiene menos incógnitas.

Los sistemas escalonados, una vez eliminadas las ecuaciones triviales ($0 = 0$), son muy fáciles de clasificar:

{Si n° de filas = n° de incógnitas $\Rightarrow$ es un S.C.D. Si n° de filas $<$ n° de incógnitas $\Rightarrow$ es un S.C.I. Si una

Actividad resuelta

Usando el método de Gauss clasifica los siguientes sistemas de ecuaciones y resuélvelos, si es posible:

$$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 2x - 2y + z = 18 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$$

Resolución

Matriz ampliada o del sistema $A^* = \begin{pmatrix} x & y & z & b \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 18 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & b \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 18 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_2 - 2F_1 \quad 3F_3 - F_1} \begin{pmatrix} x & y & z & b \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 18 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz escalonada que corresponde al sistema $\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ -4y + 5z = 54 \\ -27z = 54 \end{cases}$.

El sistema es compatible determinado, tiene solución única.

Despejando a partir de la 3ª ecuación, $z = -2$.

Sustituyendo, $-4y + 5(-2) = 54$, $y = -16$; $3x - (-16) - (-2) = 0$, $x = 6$

La solución única es $x = 6$, $y = -16$, $z = -2$

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ 5x - 4y + 3z = 9 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

Resolución

Matriz ampliada o del sistema $A^* = \begin{pmatrix} x & y & z & b \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 3 & 9 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & b \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 3 & 9 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_2 - 5F_1 \quad F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} x & y & z & b \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 3 & 9 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz escalonada que corresponde al sistema $\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ -13y + 16z = 13 \\ 120z = 0 \end{cases}$.

El sistema es compatible determinado, tiene solución única.

Despejando a partir de la 3ª ecuación, $z = 0$.

Sustituyendo, $-13y + 16 \cdot 0 = 13$, $y = -1$; $2x - 1 + 0 = 1$, $x = 1$

La solución única es $x = 1, y = -1, z = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} (x \ y \ z) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolución

Matriz ampliada o del sistema $A^* = \begin{pmatrix} x & y & z & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 3 & 1 & 0 & 2 & | & 2 & 1 & 3 & | & -1 \end{pmatrix}$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 3 & 1 & 0 & 2 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 & 2 & | & 2 & 0 & -3 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz escalonada que corresponde al sistema $\begin{cases} y = -1x + 2z = 2 \\ -3y + z = 3 \end{cases}$.

El sistema es compatible determinado, tiene solución única.

Sustituyendo, $-3(-1) + z = 3$, $z = 0$; $x + 2 \cdot 0 = 2$, $x = 2$

La solución única es $x = 2, y = -1, z = 0$

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - z = 0 \\ -2y + z = 4 \end{cases}$$

Resolución

Matriz ampliada o del sistema $A^* = \begin{pmatrix} x & y & z & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -2 & 2 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{pmatrix}$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -2 & 2 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -2 & 0 & -2 & | & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz escalonada que corresponde al sistema $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ -2y + z = 4 \end{cases}$.

Como el número de ecuaciones es menor que el de incógnitas, es un sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Despejando a partir de la 2ª ecuación, $z = 4 + 2y$; $x + y - (4 + 2y) = -2$, $x = 2 + y$

Llamando, $z = k$, las infinitas soluciones son $\begin{cases} x = 2 + k \\ y = k \\ z = 4 + 2k \end{cases}$, con $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} (x \ y \ z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución

Matriz ampliada o del sistema $A^* = \begin{pmatrix} x & y & z & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 2 & 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 1 & | & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 2 & 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 1 & | & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 2 & 0 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 1 & | & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 2 & 0 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 1 & | & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz escalonada que corresponde al sistema $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$.

Como el número de ecuaciones es menor que el de incógnitas, es un sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Despejando a partir de la 2ª ecuación, $y = z + 1$; $x + 3(z + 1) = 2$, $x = -3z - 1$

Llamando, $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = -3k - 1, y = k + 1, z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$
 $\{x + y = 1 + z, 2x + z = 2 + y, y = z\}$

Resolución

Reordenando los términos queda el sistema $\{x + y - z = 1, 2x - y + z = 2, y - z = 0\}$

Matriz ampliada o del sistema $A^* = \begin{pmatrix} x & y & z & b \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Aplicamos el método de Gauss:

$\begin{pmatrix} x & y & z & b \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2 - 2F1} \begin{pmatrix} x & y & z & b \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz escalonada que corresponde al sistema $\{x + y - z = 1, y - z = 0\}$.

Como el número de ecuaciones es menor que el de incógnitas, es un sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Despejando a partir de la 2ª ecuación, $y = z$; $x + z - z = 1$, $x = 1$

Llamando, $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = 1, y = k, z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$

$\{2x + 3y - z = 4, x + 2y + z = 5\}$

Resolución

Matriz ampliada o del sistema $A^* = \begin{pmatrix} x & y & z & b \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Aplicamos el método de Gauss:

$\begin{pmatrix} x & y & z & b \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F2 - F1} \begin{pmatrix} x & y & z & b \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Matriz escalonada que corresponde al sistema $\{2x + 3y - z = 4, y + 3z = 6\}$.

Como el número de ecuaciones es menor que el de incógnitas, es un sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Despejando a partir de la 2ª ecuación, $y = 6 - 3z$; $2x + 3(6 - 3z) - z = 4$, $2x - 10z + 18 = 4$, $x = 5z - 7$

Llamando, $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = 5k - 7, y = 6 - 3k, z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$

$\{5x + 2y - 2z = 0, 3x - y + 3z = 0, 8x + y + z = -1\}$

Resolución

Matriz ampliada o del sistema $A^* = \begin{pmatrix} x & y & z & b \\ 5 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Aplicamos el método de Gauss:

$\begin{pmatrix} x & y & z & b \\ 5 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{5F2 - F1, 5F3 - 8F1} \begin{pmatrix} x & y & z & b \\ 5 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & 5 \end{pmatrix}$

Matriz escalonada que corresponde al sistema $\{5x + 2y - 2z = 0, -11y + 21z = 0, 0 = 5\}$.

Como la ecuación $0 = 5$ es imposible, el sistema es incompatible, no tiene solución.

$\{-2x + y + z = 1, x - 2y + z = -2, x + y - 2z = 4\}$

Resolución

Matriz ampliada o del sistema $A^* = \begin{array}{ccc|ccc} x & y & z & b & (-2 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & -2 & 1 & | & -2 & 1 & 1 & -2 & | & 4) \end{array}$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{array}{ccc|ccc} x & y & z & b & (-2 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & -2 & 1 & | & -2 & 1 & 1 & -2 & | & 4) \end{array} \quad F_1 + 2F_2 \quad F_2 - F_3 \quad \begin{array}{ccc|ccc} x & y & z & b & (0 & -3 & 3 & | & - & - & - & - & | & - & - & - & - & | & -) \end{array}$$

Matriz escalonada que corresponde al sistema $\{-3y + 3z = -3 \quad x - 2y + z = -2 \quad 0 = 3\}$.

Como la ecuación $0 = 3$ es imposible, el sistema es incompatible, no tiene solución.

Regla de Cramer

Es un método que sirve para resolver sistemas compatibles.

Si el sistema es de 3 ecuaciones con 3 incógnitas x, y, z , las incógnitas las podemos calcular usando las siguientes fórmulas:

$x = \frac{|A_x|}{|A|}$, $y = \frac{|A_y|}{|A|}$, $z = \frac{|A_z|}{|A|}$, siendo A la matriz de coeficientes, A_x , A_y y A_z las matrices obtenidas al sustituir en A la columna de las x, y, z por la columna de términos independientes, respectivamente.

Método de la ecuación matricial

Sea $AX = b$ un sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas con $|A| \neq 0$

En este caso el sistema es compatible determinado y la solución se puede obtener despejando X en la

ecuación matricial: $AX = b$. Multiplicando por A^{-1} , por la izquierda $A^{-1}AX = IX = A^{-1}b \Rightarrow X = A^{-1}b$

Ejemplo:

Resuelve por la regla de Cramer y por el método matricial el sistema

$$\begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ 2x + y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Resolución

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\det A = 2 - 6 + 3 + 4 = 3$; columna de los términos independientes

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por la regla de Cramer:

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \det A_x = 2 \quad A_y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \det A_y = -4$$

$$A_z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \det A_z = 1$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{2}{3} \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-4}{3} \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{1}{3}$$

Por el método matricial:

$$X = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t b = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & -1 & 5 & -2 & 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 & 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3} \quad \frac{-4}{3} \quad \frac{1}{3} \right). \text{ Luego la solución es } x = \frac{2}{3}, y = \frac{-4}{3}, z = \frac{1}{3}$$

ANEXO: MÁS ACTIVIDADES

– Resuelve los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 0x = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} 7x - 4y = -3 \\ 6x = -9 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ -x + y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 5y = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -3x + 6y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4(x - 2) = 1 + 2(y + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = 6 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + 3y = 12 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 7z = -10 \\ x - 2z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 6y + 4z = 12 \\ 3x - 9y + 6z = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 5y - 2z = -5 \\ 2x + 3y + 2z = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 2z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - z = 4 \\ y + 3x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 3y - 3z = 0 \\ x + 5y + 11z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y + 8z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 6x + 18y - 10z = 0 \\ 7x - 2y - 4z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 10y - 6z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x - 7z = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -5x + 3y + 4z = 0 \\ 10x - 8y - 9z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 15x + y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - 5z - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y + 2z + 1 = 0 \\ 5x + 4y - 6z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 7z = 10 \\ 5x - y + z = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 4y - 10z = -11 \\ x - 3y - 2z = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + 15z = 3 \\ x - 8y - 21z = 11 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 2z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y - 3z = 3 \\ x - y + 3z = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2y + z = 4 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} -4x + 2y + 2z = -6 \\ 6x - 3y - 3z = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - z = 4 \\ x - y - z = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 4x + y - 3z = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x - 2y - 2z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 17 \\ 4x + 5y + z = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 3y - z = 4 \\ x + 4y = 5 \\ 2x - 6y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 6 \\ -2x + 4y - z = 3 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y - 2z = 5 \\ 2x - 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 5x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ 3x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 3x - 3y + z = -14 \\ 5x - y - 2z = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 5y + z = -4 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 4 \\ 5x - 5y + 4z = 8 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 3z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 5 \\ x + 2y + z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 3x - 2y - 2z = 1 \\ 5x - 3y - 3z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = -4 \\ 2x + y + 3z = 9 \\ -x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y - z = -4 \\ 3x + y + 3z = 0 \\ x + 2y + 2z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 3x + y + 3z = 4 \\ x + 2y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 3x + y - 4z = 1 \\ 2x + 2y - 6z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - 4y + 4z = 10 \\ 2x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y + z = -2 \\ x + 2y + 4z = 3 \\ 2x + 3y + 9z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y + 4z = 1 \\ x + y = 4 \\ -2x + 7y + 12z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 2y + 6z = -7 \\ x + y + 3z = 2 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y + 4z = 10 \\ x + y = 4 \\ 3x - 4z = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + 2y + 2z = 15 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -2y + 3z = 7 \\ -3y + 4z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 3x - 3y + 3z = 12 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x + 2y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y - z = -4 \\ 5x - 2y + z = 6 \\ -x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y - 2z = -3 \\ 3x - y + 4z = -2 \\ -x + y + z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 4y = 4 \\ -x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3z = 5 \\ 2y + 5z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y = 4 \\ x - 2z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = -6 \\ x + z = 5 \\ 2x - y = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 2y - z = -1 \\ 3y - z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - z = 4 \\ x - 2y = -2 \\ 3x - 2z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = z \\ x + z = y \\ y - z = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 16 \\ 6x - y - 18z = -8 \\ -4x + 3y + 12z = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + 3y = 2 \\ 4x + 13y - z = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ 5x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7y = -14 \\ 2x - y + z = 1 \\ 9x - y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 7z = 10 \\ 5x - y + z = 8 \\ x + 4y - 10z = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - 4y + 4z = 10 \\ 2x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - y + 3z = -6 \\ x + 3y - z = 10 \\ 2x - y + 4z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = \frac{33}{2} \\ 5x - 2y + 3z = \frac{49}{2} \\ 3x - 2z = 13 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\{x + y - z = 0 \quad 4x - y + 5z = 0 \quad -2x + y - 2z = 0 \quad 3x + 2y - 6z = 0 \\ &\{3x + 2y - z = 0 \quad x + z = 2 \quad -x + y = 3 \quad x - y + z = 4 \\ &\{x - 2y + z = 2 \quad 2x + y - z = 1 \quad 2x - y = 0 \quad -x + 2y - z = -2 \\ &\{3x + 2y - z = 0 \quad 3x + 3y = 5 \quad x + z = 2 \quad -x + y = 3 \\ &\{2x - y + z = 5 \quad 3x + 2y = 1 \quad -x + 4y - 2z = -9 \quad 6x + 11y - 3z = -11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{2x + 2y - z + t = -1 \quad x - y + z = 2 \\ &\{x + 2y + z + t = 3 \quad -x + y + 2t = -1 \quad -x + 7y + 2z + 8t = 1 \\ &\{-x + 2y + 5z + t = 0 \quad 3x - 2y - 9z + t = 0 \quad x - 4y - 8z - 3t = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{3x + 3y + 11z - t = 8 \quad 2x + 5z + 3t = 4 \quad x - y + 2z + 2t = 2 \\ &\{2x + y - z + t = -1 \quad x + y + z = 0 \quad -x + 2y - z = 1 \\ &\{x + y - z + t = 2 \quad 2x - y + z + 2t = 1 \quad 2x + 2y - 2z + 2t = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{-x + y - z = -2 \quad x - y + 2z = 4 \quad x + z + t = 3 \quad x + 2z + t = 1 \\ &\{3x - y + z - t = 1 \quad 2x + 4y - 6t = 0 \quad x + y - z + 2t = 0 \quad 3x + 6y - 9t = -1 \\ &\{x + y + z + t = 10 \quad 2x - 3z + 2t = 4 \quad 3y + z - 5t = 6 \quad -x + 2z = 0 \\ &\{2x + y + 4z + 8t = -1 \quad x + 3y - 6z + 2t = 3 \quad 3x - 2y + 2z - 2t = 8 \quad 2x - y + 2z = 4 \end{aligned}$$