Chapitre A6
Le rôle de la lettre et du signe égal

I. Définitions

Une **expression littérale** est une expression où certains nombres sont désignés par des lettres (x, y, z ,…). Ces nombres sont appelés des **variables** contrairement aux nombres écrits en chiffres appelés **constantes**.

Dans l'expression $A = 4x + 5$, x est une **variable** ; 4 et 5 sont des **constantes**.

Remarque

Dans une somme, les nombres qui la composent sont les **termes** de la **somme**.

Dans un produit, les nombres qui le composent sont les **facteurs** du **produit**.

Dans l'expression A, 5 est le **terme constant**.

Notations

$4 \times x$ se note $4x$.

$x \times x$ se note x^2.

$4 \times (x + 2) = 4(x + 2)$

$(5x - 3) \times (x + 2) = (5x - 3)(x + 2)$

Par contre, on ne note pas $(x + 2)4$ mais $(x + 2) \times 4 = 4(x + 2)$

En général, si le signe opératoire n'est pas indiqué, il s'agit d'une **multiplication**.

II. Substitution

Dans une expression littérale, **remplacer** les variables par des valeurs données, c'est **substituer** ces variables par ces valeurs.

Exemple

On peut calculer l'expression suivante :

$A = 3x + 5$ pour $x = 2$.

Solution

$A = 3x + 5 = 3\times2 + 5 = 6 + 5 = 11$.

Remarque

Lorsque l'on substitue un **nombre négatif** ou une **fraction** dans une expression littérale, on place des **parenthèses** autour de ce nombre.

Exemples type brevet

Exercice 1

Calcule $B = 3x^2 - 5x + 2$ pour $x = 3$.

Solution

$B = 3x^2 - 5x + 2 = 3\times3^2 - 5\times 3 + 2$

$B = 3\times9 - 15 + 2 = 14$

Exercice 2 (test d'égalité)

L'égalité $3x - 7 = 2x + 8$ est-elle vérifiée pour $x = 8$?

Solution

Pour $x = 8$,

D'une part, $3x - 7 = 3\times8 - 7 = 24 - 7 = 17$.

D'autre part, $2x + 8 = 2\times8 + 8 = 16 + 8 = 24$.

Donc, l'égalité n'est pas vérifiée pour $x = 8$.

Exercice 3 (test d'égalité)

L'égalité $4x - 5 = 7$ *est-elle vérifiée pour* $x = 3$ *?*

Solution

Pour $x = 3$

$4x - 5 = 4\times3 - 5 = 12 - 5 = 7$

Donc l'égalité est vérifiée pour $x = 3$.

Remarque

La partie gauche d'une égalité est le « **membre de gauche** », la partie droite de l'égalité est le « **membre de droite** ».

III. Propriétés fondamentales

Pour définir toutes les opérations et les propriétés des nombres réels, on a besoin des propriétés suivantes :

Propriété

Soit a, b et c des nombres réels :

- $a + 0 = a$ (0 est l'**élément neutre** de l'addition)

$a\times1 = a$ (1 est l'**élément neutre** de la multiplication)

- $a + b = b + a$ $\quad\quad a\times b = b\times a$ (**Commutativité**)
- $(a + b) + c = a + (b + c)$

$(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$ (**Associativité)**

- $a(b + c) = ab + ac$ (**Distributivité** de la multiplication par rapport à l'addition)

Exemples

$A = 4x + 3x = 4\times x + 3\times x = (4 + 3)\times x = 7\times x = 7x$

$B = 5x - 2x = 5\times x - 2\times x = (5 - 2)\times x = 3\times x = 3x$

$C = 7x + x = 7\times x + 1\times x = (7 + 1)\times x = 8\times x = 8x$

$D = 8x - x = 8\times x - 1\times x = (8 - 1)\times x = 7\times x = 7x$

Remarques

- L'expression $3x + 4$ ne peut être simplifiée.
- On ne peut additionner (en utilisant la distributivité) que des termes de même ordre :

$E = 4x^2 + 7x + 8 - x^2 + 3x - 5 = 3x^2 + 10x + 3$

- Lorsque l'on **multiplie des facteurs d'ordres différents**, **on peut simplifier** l'expression en utilisant la commutativité :

$F = 3x\times4x = 3\times x\times4\times x = 3\times4\times x\times x = 12x^2$

$G = 5x\times2 = 5\times x\times2 = 5\times2\times x = 10x$

Exemples
On développe les expressions suivantes :

$C = 3x(2x + 7) = 3x\times2x + 3x\times7 = 6x^2 + 21x$

$D = 2x(4x - 5) = 2x\times4x - 2x\times5 = 8x^2 - 10x$

$E = x(7x - 1) = x\times7x - x\times1 = 7x^2 - x$

Application au calcul mental
Comment calculer 70×48 de tête ?
$70\times48 = 70\times(40 + 8) = 70\times40 + 70\times8 = 2800 + 560$

$70\times48 = 3360$

On reprend en fait l'opération posée.

Factorisation
Pour factoriser une expression, on repère ce qui est commun à ses différents termes.
Par exemple, dans l'expression $A = 3x^2 + 9x$, le facteur commun est $3x$ car les 2 termes $3x^2$ et $9x$ sont multiples de 3 et de x.
On va donc écrire chaque terme sous la forme $3x\times$…

$$A = 3x\times x + 3x\times3$$

On utilise ensuite la distributivité

$$A = 3x(x + 3)$$

Autres exemples
$B = 5x + 15 = 5\times x + 5\times3 = 5(x + 3)$

$C = 24x^2 - 16x = 8x\times3x - 8x\times2 = 8x(3x - 2)$

Application au calcul mental
- $32\times48 + 32\times52 = 32(48 + 52) = 32\times100 = 3200$
- $151\times57 - 151\times55 = 151(57 - 55) = 151\times2 = 302$

Suppression de parenthèses
Si une parenthèse est **précédée d'un signe +** et éventuellement suivie d'un signe + ou −, on peut la supprimer sans changer le résultat du calcul.
$D = (5 + 7x - 3) + (8 - 5 + 3x) + (- 8x - 7)$

$D = 5 + 7x - 3 + 8 - 5 + 3x - 8x - 7$

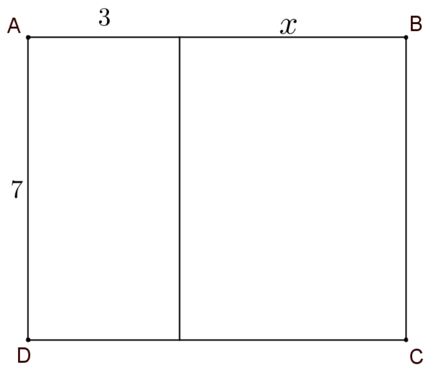
$D = 2x - 2$

Si une parenthèse est **précédée d'un signe −** et éventuellement suivie d'un signe + ou −, on peut la supprimer sans changer le résultat du calcul à condition de **changer le signe de chaque nombre dans la parenthèse**.
$E = (5 + 7x - 3) - (8 - 5x + 3) - (- 8x - 7)$

$E = 5 + 7x - 3 - 8 + 5x - 3 + 8x + 7$

$E = 20x - 2$

IV. Application à la géométrie



On veut calculer l'aire du rectangle ABCD en fonction de x puis pour $x = 2\ cm$.

Solution

L'aire du rectangle ABCD vaut :

$A = AD \times AB = 7(3 + x)$

$A = 7\times3 + 7\times x$

$A = 21 + 7x$ *(aire en fonction de x)*

Si $x = 2\ cm$,

$A = 21 + 7\times2 = 21 + 14 = 35\ cm^2$