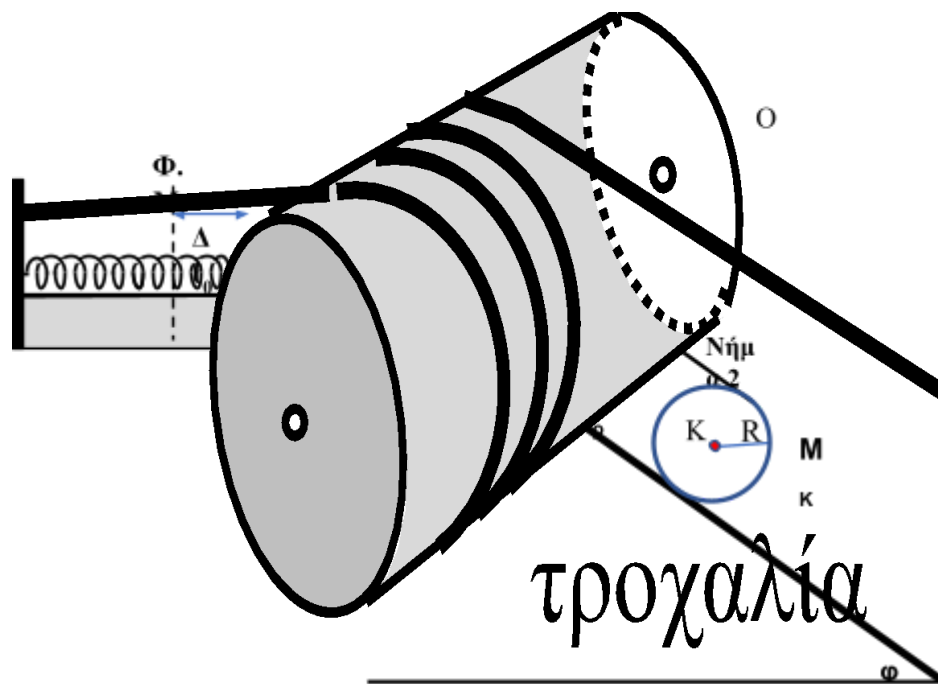


Ένα σύστημα σωμάτων

Η διπλανή διάταξη του σχήματος περιλαμβάνει ένα ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k=100\text{N/m}$ το ένα άκρο του οποίου είναι συνδεδεμένο σε ακλόνητο τοίχο και στο άλλο άκρο του έχει συνδεθεί σώμα Σ_1 μάζας $M_1=1\text{kg}$. Το σώμα Σ_1 στην δεξιά του πλευρά έχει συνδεθεί με το άκρο αβαρούς μη εκτατού νήματος, (νήμα 1), το οποίο έχει τυλιχτεί πολλές φορές σε ομογενή τροχαλία, μάζας $M_{\text{τρ}}=1,5\text{kg}$ και ακτίνας $r=0,1\text{m}$ και η οποία μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές περί ακλόνητο άξονα που διέρχεται



από το κέντρο της Ο. Το άλλο άκρο του νήματος, (νήμα 2), είναι δεμένο εφαπτομενικά στην περιφέρεια ομογενούς κυλίνδρου μάζας $M_K=2\text{kg}$ και ακτίνας $R=2r$. Το νήμα 2 είναι παράλληλο στον άξονα του κεκλιμένου επιπέδου το οποίο έχει γωνία κλίσης φ ώστε $\eta\mu\varphi=0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,8$.

Αρχικά όλο το σύστημα ισορροπεί.

i. Να βρείτε την αρχική επιμήκυνση $\Delta \ell_0$ του ελατηρίου.

Κάποια στιγμή που θεωρούμε $t=0$ κόβουμε το νήμα 1 που συνδέει το σώμα Σ_1 και την τροχαλία.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου σε συνάρτηση με το χρόνο θεωρώντας ως θετική φορά για την ταλάντωση την αρχική απομάκρυνση του σώματος.

iii. Να βρεθεί η στροφορμή της τροχαλίας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της τη χρονική στιγμή που ο κύλινδρος διαγράφει $40/\pi$ πλήρεις περιστροφές.

iv. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου τη δεύτερη φορά που μηδενίζεται ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος Σ₁.

υ. Αν στην αρχική διάταξη αντί να κοπεί το νήμα 1 κόβεται το νήμα 2, τότε, να βρεθεί το πλάτος ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα Σ₁.

Δίνονται:

- Το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας είναι $|\vec{g}|=10\text{m/s}^2$.

- Για τον κύλινδρο η ροπή αδράνειας περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας

$$\text{του } I_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M_K R^2 \quad \text{και η ροπή αδράνειας για την τροχαλία περί τον άξονα}$$

$$\text{περιστροφής } O, \quad I_{(O)} = \frac{1}{2} M r^2.$$

- $\sqrt{7} \approx \frac{21}{8}$

Απάντηση

i. Επειδή το νήμα είναι αβαρές κάθε στιγμή θα ισχύει:

$$|T_1| = |T_1'| \quad \text{και} \quad |T_2| = |T_2'| \quad (1)$$

Από την ισορροπία του κυλίνδρου προκύπτει:

$$\Sigma \vec{\tau}_{(\text{cm})} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\vec{\tau}_N + \vec{\tau}_{W_K} + \vec{\tau}_{T_2} + \vec{\tau}_{T_{\sigma\tau}} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$T_{\sigma\tau} R - T_2 R \Rightarrow T_2 = T \quad (2)$$

$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow W_{K,x} - T_2 - T_{\sigma\tau} = 0 \Rightarrow$$

$$T_2 = \frac{W_{K,x}}{2} = \frac{M_K g \eta \mu \phi}{2} \quad (3)$$

Από την ισορροπία της τροχαλίας προκύπτει:

$$\Sigma \vec{\tau}_{(O)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\tau}_2' + \vec{\tau}_1' = \vec{0} \Rightarrow T_2' R - T_1' R = 0 \Rightarrow T_2' = T_1' \Rightarrow T_1 = T_2 \Rightarrow T_1 = \frac{M_K g \eta \mu \phi}{2}$$

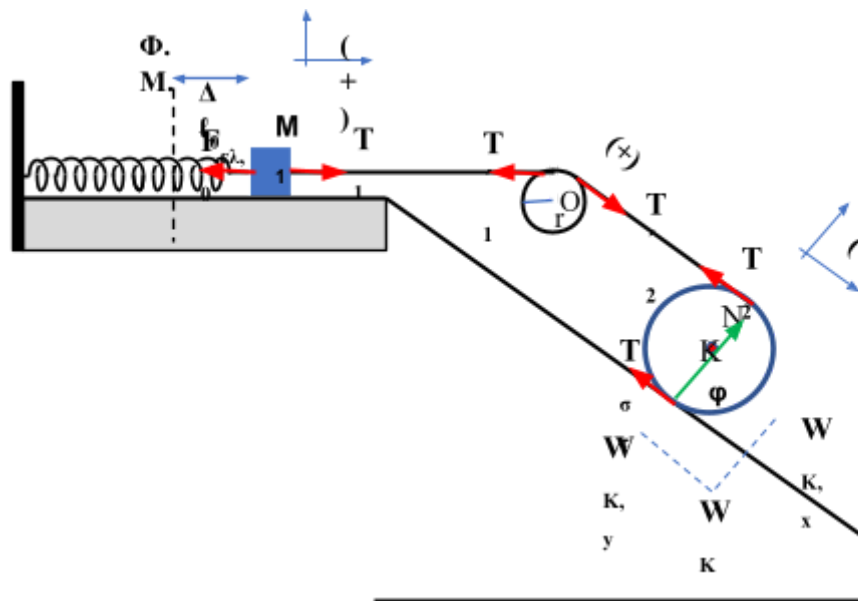
(4)

Από την ισορροπία του σώματος M_1 προκύπτει:

$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow T_2 - F_{\varepsilon\lambda,0} = 0 \Rightarrow \frac{M_K g \eta \mu \phi}{2} = k \Delta \ell_0 \Rightarrow \Delta \ell_0 = \frac{M_K g \eta \mu \phi}{2k} \Rightarrow \Delta \ell_0 = 0,06 \text{m}$$

ii.

Το σώμα ξεκινά ταλάντωση από ακραία θέση επειδή τη στιγμή που κόβεται το νήμα έχει μηδενική ταχύτητα. Η θέση ισορροπίας του ταυτίζεται με τη θέση φυσικού μήκους, έτσι το πλάτος της ταλάντωσης ισούται με την αρχική απομάκρυνση $\Delta \ell_0$.



Θεωρώντας ως θετική φορά για την ταλάντωση την προς τα δεξιά η αρχική φάση

$$\omega_{\text{ταλ}} = \sqrt{\frac{k}{M_1}} = 10 \text{ rad/s}$$

είναι $\phi_0 = \pi/2 \text{ rad}$. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης

Η εξίσωση της απομάκρυνσης ισούται με $x = 0,06 \cdot \eta\mu(10t + \pi/2) \text{ S.I.}$

$$\Sigma F_{\text{ταλ}} = -D \cdot x \rightarrow$$

$$F_{\text{ελ}} = -100 \cdot x \rightarrow$$

$$F_{\text{ελ}} = -6 \cdot \eta\mu(10t + \pi/2) \text{ S.I.}$$

iii.

Μόλις κοπεί το νήμα 1 ο κύλινδρος θα κινηθεί προς τα κάτω κυλιόμενος και εξαιτίας της σύνδεσής του με την τροχαλία μέσω του νήματος 2, θα στρέφεται και η τροχαλία. Επειδή το σχοινί είναι τυλιγμένο πολλές φορές στην τροχαλία θα μένει συνεχώς τεντωμένο και όλα τα σημεία του θα έχουν ίδιο μέτρο ταχύτητας.

$$v_A = v_B \rightarrow 2v_{\text{cm}} = \omega_{\text{τ}} r \Rightarrow$$

$$2\omega_{\text{κ}} R = \omega_{\text{τ}} r \xrightarrow{R_{\text{κ}} = 2r} \omega_{\text{τ}} = 4\omega_{\text{κ}} \text{ και } a_{\gamma, \tau} = 4a_{\gamma, \kappa} \quad (5)$$

Επιπλέον προκύπτει:

$$v_{\text{cm}} = \omega_{\text{κ}} \cdot R \rightarrow a_{\text{cm}} = a_{\gamma, \kappa} \cdot R = a_{\gamma, \tau} \cdot r/2 \quad (6)$$

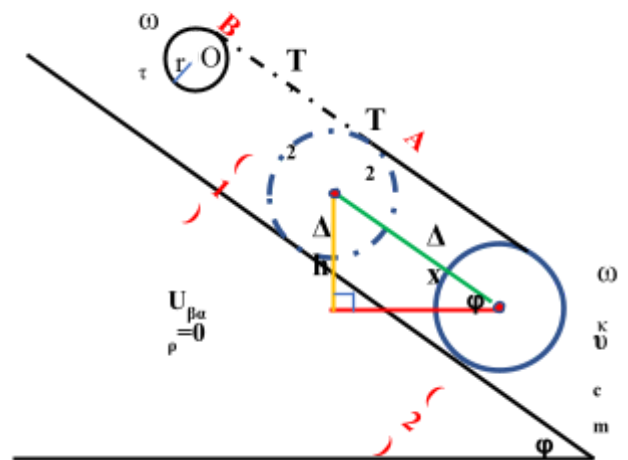
Όταν ο κύλινδρος ολοκληρώσει $40/\pi$ πλήρεις στροφές τότε $\Delta\theta_{\text{κυλ}} = 80 \text{ rad}$ και $\Delta S_{\text{κυλ}} = R \cdot \Delta\theta = 16 \text{ m}$. Εξαιτίας της κύλισης η μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι $\Delta x_{\text{cm}} = \Delta S_{\text{κυλ}} = 16 \text{ m}$. Το κέντρο μάζας του κυλίνδρου θα έχει κατέβει από την αρχική του θέση κατά $\Delta h = \Delta x_{\text{cm}} \cdot \eta\mu\theta = 9,6 \text{ m}$.

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή καθώς η στατική τριβή στο σύνολό της δεν παράγει έργο όπως επίσης και οι τάσεις των νημάτων. Η ελάττωση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του κυλίνδρου γίνεται κινητική ενέργεια στον κύλινδρο και την τροχαλία.

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος στην αρχή και όταν κατακόρυφα το κέντρο μάζας του κυλίνδρου κατέλθει κατά $\Delta h = 9.6 \text{ m}$ προκύπτει

$$A\Delta ME \ 1 \rightarrow 2$$

$$\begin{aligned} E_{\text{MHX},1} &= E_{\text{MHX},2} \rightarrow \\ K_{1,\text{τρ}} + U_{\text{B1},\text{τρ}} + K_{1,\text{κ}} + U_{\text{B1},\text{κ}} &= K_{2,\text{τρ}} + U_{\text{B2},\text{τρ}} + K_{2,\text{κ}} + U_{\text{B2},\text{κ}} \rightarrow \\ M_{\text{κ}} \cdot g \cdot \Delta h &= \frac{1}{2} I_{\text{τρ}} \cdot \omega_{\text{τρ}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{κυλ}} \cdot \omega_{\text{κυλ}}^2 + \frac{1}{2} M_{\text{κ}} \cdot v_{\text{cm}}^2 \rightarrow \\ M_{\text{κ}} \cdot g \cdot \Delta h &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M_{\text{τρ}} \cdot r^2 \cdot \omega_{\text{τρ}}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M_{\text{κ}} \cdot R^2 \cdot \omega_{\text{κυλ}}^2 + \frac{1}{2} M_{\text{κ}} \cdot v_{\text{cm}}^2 \rightarrow \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 M_K \cdot g \cdot \Delta h &= \frac{1}{4} \cdot M_{\tau\rho} \cdot 4 \cdot v_{cm}^2 + \frac{1}{4} \cdot M_K \cdot v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \cdot M_K \cdot v_{cm}^2 \rightarrow \\
 M_K \cdot g \cdot \Delta h &= (M_{\tau\rho} + \frac{3}{4} M_K) \cdot v_{cm}^2 \rightarrow \\
 2 \cdot 10 \cdot 9,6 &= 3 \cdot v_{cm}^2 \rightarrow \\
 v_{cm} &= 8 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

$$\omega_{\tau} = 2v_{cm}/r = 160 \text{ r/s}$$

$$L_{\tau} = I_{(O)} \omega_{\tau} = \frac{1}{2} M_{\tau\rho} \cdot r^2 \cdot \omega_{\tau} = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 0,1^2 \cdot 160 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

iv.

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με τη συνισταμένη δύναμη. Η δύναμη ταλάντωσης μηδενίζεται στη θέση ισορροπίας. Επειδή η ταλάντωση ξεκινά από ακραία θέση η δεύτερη φορά που θα περάσει από τη θέση ισορροπίας θα είναι τη χρονική στιγμή $t_1 = 3T/4 = 3\pi/20 \text{ s}$.

Θα βρούμε ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου τη στιγμή αυτή.

κύλινδρος

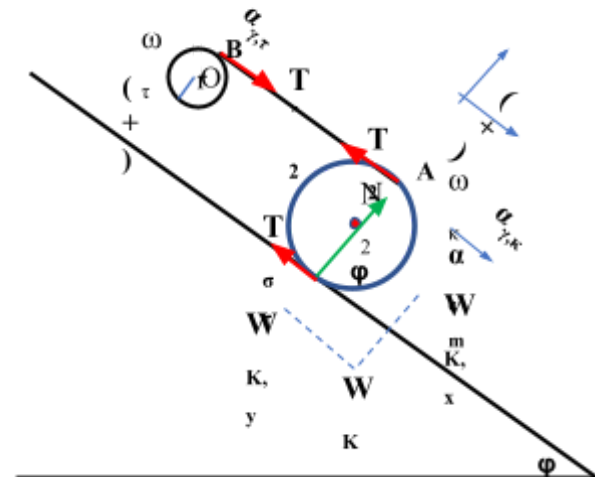
$$\vec{\Sigma F}_x = M_K \vec{a}_{cm} \Rightarrow w_{K,x} - T_2 - T_{\sigma\tau} = M_K \alpha_{cm} \quad (7)$$

$$\vec{\Sigma \tau}_{(cm)} = I_{cm} \vec{\alpha}_{\gamma} \Rightarrow \vec{\tau}_N + \vec{\tau}_{w_K} + \vec{\tau}_{T_2} + \vec{\tau}_{T_{\sigma\tau}} = I_{cm} \vec{\alpha}_{\gamma,K} \Rightarrow \quad \otimes (+)$$

$$T_{\sigma\tau} R - T_2 R = \frac{1}{2} M_K R^2 \alpha_{\gamma,K} \Rightarrow$$

$$T_{\sigma\tau} - T_2 = \frac{1}{2} M_K \alpha_{cm} \quad (8)$$

$$(7) + (8) \Rightarrow w_{K,x} - 2T_2 = \frac{3}{2} M_K \alpha_{cm} \quad (9)$$



$$\text{Επειδή το νήμα είναι αβαρές } |T_2| = |T'_2| \quad (10)$$

τροχαλία

$$\vec{\Sigma \tau}_{(O)} = I_{(O)} \vec{\alpha}_{\gamma,\tau} \Rightarrow \vec{\tau}_{T'_2} = I_{(K)} \vec{\alpha}_{\gamma,\tau} \Rightarrow T'_2 r = \frac{1}{2} M_{\tau\rho} r^2 \alpha_{\gamma,\tau} \xrightarrow{(6)} T'_2 = \frac{1}{2} M_{\tau\rho} 2 \alpha_{cm} \xrightarrow{(10)}$$

$$T_2 = M_{\tau\rho} \alpha_{cm} \quad (11)$$

Από την σχέση (9) και (10) προκύπτει:

$$w_{K,x} = \left(\frac{3}{2} M_K + 2 M_{\tau\rho} \right) \alpha_{cm} \rightarrow \alpha_{cm} = \frac{M_K g \sin \phi}{\frac{3}{2} M_K + 2 M_{\tau\rho}} \rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 0,6}{\frac{3}{2} \cdot 2 + 2 \cdot 1,5} \text{ m/s}^2 \rightarrow$$

$$\alpha_{cm} = 2 \text{ m/s}^2$$

Από τη σχέση (5) και (6) προκύπτει $\alpha_{\gamma,\tau} = 2 \cdot \alpha_{cm}/r = 40 \text{ r/s}^2$ και $\alpha_{\gamma,K} = \alpha_{cm}/R = 10 \text{ r/s}^2$

$$v_{cm} = \alpha_{cm} \cdot t = 2 \cdot t, \quad \omega = \alpha_{\gamma, K} \cdot t = 10 \cdot t$$

$$\left. \frac{dK}{dt} \right|_{\text{κυλ}} = \left. \frac{dK}{dt} \right|_{\text{μετ}} + \left. \frac{dK}{dt} \right|_{\text{στρ}} = \Sigma F \cdot v_{cm} + \Sigma \tau \cdot \omega = M_K \cdot \alpha_{cm} \cdot v_{cm} + I_{cm, (K)} \cdot \alpha_{\gamma, K} \cdot \omega \xrightarrow[\omega = \alpha_{\gamma, K} t]{v_{cm} = \alpha_{cm} t}$$

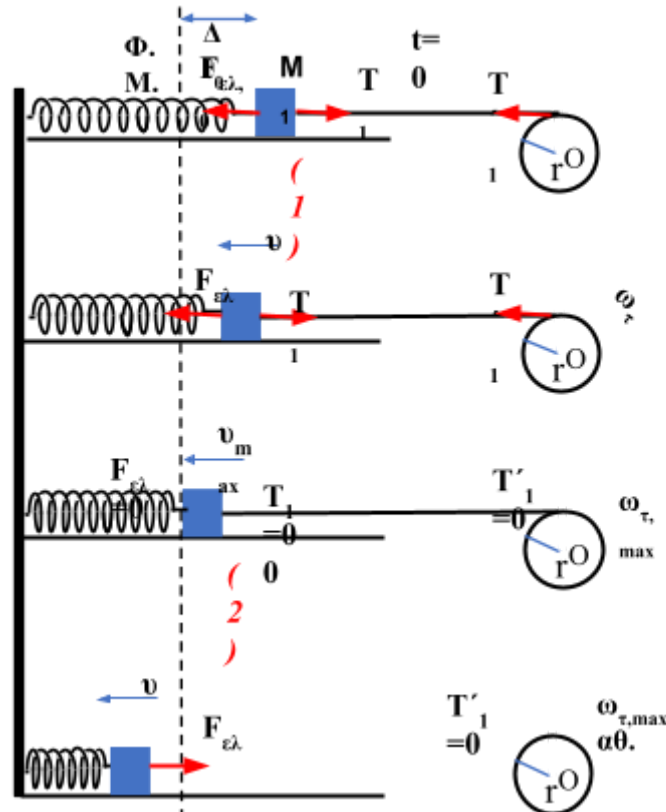
$$\left. \frac{dK}{dt} \right|_{\text{κυλ}} = M_K \cdot \alpha_{cm}^2 \cdot t + \frac{1}{2} M_K \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma, K}^2 \cdot t = 2 \cdot 2^2 \cdot \frac{3\pi}{20} J/s + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot \frac{3\pi}{20} J/s = \frac{9\pi}{5} J/s$$

ν.

Μόλις κοπεί το νήμα 2 το σώμα Σ_1 θα κινηθεί προς τα αριστερά και εξαιτίας της σύνδεσής του με την τροχαλία μέσω του νήματος 1, θα στρέφεται και η τροχαλία. Επειδή το σχοινί είναι τυλιγμένο πολλές φορές στην τροχαλία θα μένει συνεχώς τεντωμένο και όλα τα σημεία του θα έχουν ίδιο μέτρο ταχύτητας.

$$v_1 = v_{\gamma, \text{τρ}} \rightarrow v_{cm, 1} = \omega_{\tau} r \quad (12)$$

Όσο το σώμα Σ_1 κινείται προς τα αριστερά πριν το φυσικό μήκος, η $F_{ελ}$ τραβά το σώμα Σ_1 και το νήμα μένει τεντωμένο. Έτσι όλα τα σημεία του έχουν ίδια ταχύτητα. Όταν το σώμα Σ_1 βρεθεί στο φυσικό μήκος θα αποκτήσει μέγιστη ταχύτητα και η τροχαλία μέγιστη γωνιακή ταχύτητα. Από εκεί και μετά λυγίζει το νήμα και δεν ασκεί πλέον δυνάμεις στα σώματα. Αυτό συμβαίνει διότι το Σ_1 θα επιβραδυνθεί καθώς αλλάζει φορά η δύναμη του ελατηρίου ενώ η τροχαλία συνεχίζει να στρέφεται αριστερόστροφα με αποτέλεσμα να λυγίσει το νήμα.



Έτσι το Σ_1 από εκεί και μετά θα εκτελέσει ΑΑΤ δεχόμενο την $F_{ελ}$ με

$$\omega_{\text{ταλ}} = \sqrt{\frac{k}{M_1}} = 10 \text{ rad/s}$$

και η τροχαλία θα στρέφεται ομαλά με την γωνιακή ταχύτητα που αποκτά όταν το Σ_1 βρίσκεται στο φυσικό μήκος.

Η ταχύτητα του σώματος στο Φ.Μ. είναι και η μέγιστη για την ταλάντωση γιατί η θέση φυσικού μήκους ταυτίζεται με τη Θ.Ι.

ΑΔΜΕ 1 $\rightarrow$ 2

$$\begin{aligned} E_{\text{MHX}, 1} &= E_{\text{MHX}, 2} \rightarrow \\ U_{\text{ελ}, (1)} &= K_1 + K_{\text{τρ}} \rightarrow \\ \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta \ell_0^2 &= \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{\text{τρ}} \cdot \omega_{\text{τρ}}^2 \rightarrow \\ \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta \ell_0^2 &= \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot M_{\text{τρ}} \cdot r^2 \cdot \omega_{\text{τρ}}^2 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta \ell_0^2 &= \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot M_{tp} \cdot v_1^2 \rightarrow \\
\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0,06^2 &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot v_1^2 \rightarrow \\
100 \cdot 0,06^2 &= 1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot v_1^2 \rightarrow \\
100 \cdot 0,06^2 &= 1 \cdot v_1^2 + \frac{3}{4} \cdot v_1^2 \rightarrow \\
0,36 &= 7 \cdot v_1^2 / 4 \\
1,44 &= 7 \cdot v_1^2 \rightarrow \\
v_1 &= \sqrt{\frac{1,44}{7}} = 1,2 \frac{\sqrt{7}}{7} m/s \rightarrow v_1 = \frac{1,2 \cdot 21}{7 \cdot 8} m/s \rightarrow v_1 = 0,45 m/s
\end{aligned}$$

Η ταχύτητα $v_1 = \omega_{ταλ} \cdot A \rightarrow A = 0,045 m \rightarrow A = 4,5 cm$