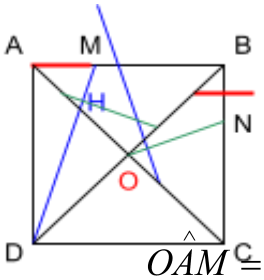
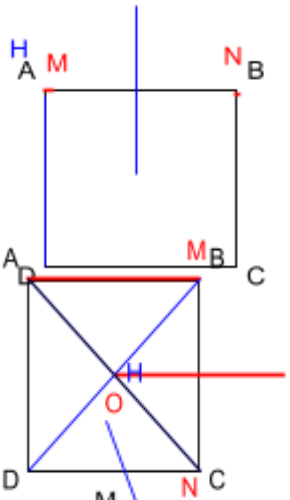
$ABCD$ مربع ، N ، M نقطتان من ضلعيه $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب حيث $AM = BN$ ،
H نقطة تقاطع $[DM]$ و $[AN]$.

1) بين أنه يوجد دوران يحول $[DM]$ إلى $[AN]$.
2) استنتج طبيعة المثلث AHD.
3) ما هي مجموعة النقط H عندما M تمسح $[AB]$ ؟
4) ما هي مجموعة النقط S منتصف $[MN]$ عندما M تمسح $[AB]$ ؟

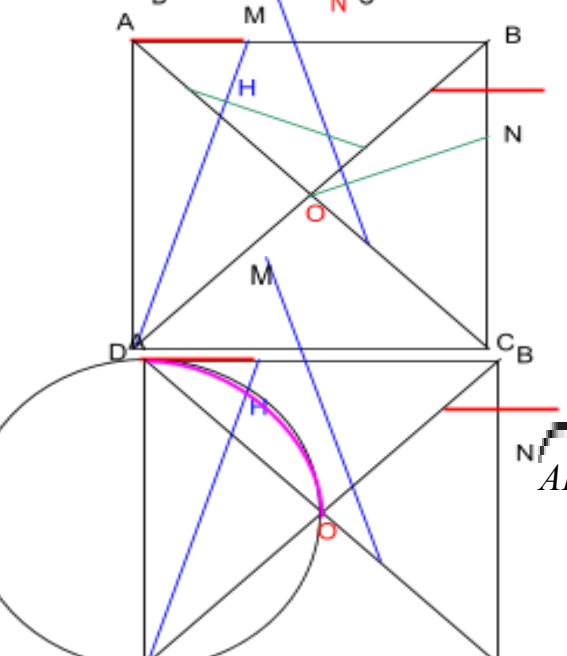
الحل :



1) تبيان أنه يوجد دوران يحول $[DM]$ إلى $[AN]$.
نوجه المستوي فالاتجاه غير المباشر. لدينا $ABCD$ مربع إذن قطراه $[AC]$ و $[BD]$
متقايسان ، متناصفان في O و متعامدان . ومنه $OA = OD$ و $D\hat{O}A = 90°$
وبالتالي : A هي صورة D بالدوران الذي مركزه O وزاويته $90°$.
نقارن بين المثلثين AMO و BNO لدينا : $OA = OB$ و $AM = BN$ ، $O\hat{A}M = O\hat{B}N = 45°$
إذن المثلثان AMO و BNO متقايسان وبالتالي : $OM = ON$ و $A\hat{O}M = B\hat{O}N$
ومنه $A\hat{O}M + M\hat{O}B = B\hat{O}N + M\hat{O}B$ أي : $A\hat{O}B = M\hat{O}N = 90°$
إذن : Nهي صورة M بنفس الدوران السابق الذي مركزه O وزاويته $90°$.
خلاصة : صورة القطعة $[AN]$ هي القطعة $[DM]$ بالدوران الذي مركزه O وزاويته $90°$.
2) استنتاج طبيعة المثلث AHD.
لدينا صورة (AN) بالدوران الذي مركزه O وزاويته $90°$ هي المستقيم (DM)،
ومنه إحدى الزوايا المحورة بين المستقيمين (AN) و (DM) تقايس زاوية الدوران أي تقايس $90°$
إذن المستقيمان (AN) و (DM) متعامدان وبالتالي المثلث AHD قائم في H.
3) تعيين مجموعة النقط H عندما M تمسح $[AB]$:
نسمي (h) مجموعة النقط H عندما M تمسح $[AB]$



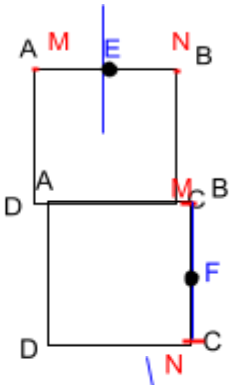
- إذا أخذنا M في الحد الأول من القطعة $[AB]$ أي M منطبقة على A
فإن N تكون منطبقة على B ومنه $[DM]$ هي $[AD]$ و $[AN]$ هي$[AB]$
وبالتالي H تكون منطبقة على A إذن المجموعة (h) تشمل النقطة A.
إذا أخذنا M في الحد الثاني من القطعة $[AB]$ أي M منطبقة على B
فإن N تكون منطبقة على C ومنه $[DM]$ هي $[DB]$ و $[AN]$ هي$[AC]$
وبالتالي H تكون منطبقة على O إذن المجموعة (h) تشمل النقطة O.
ومنه المجموعة (h) غير خالية.



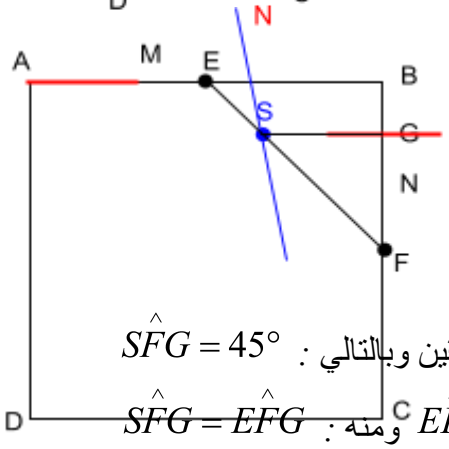
- لتكن H نقطة من المجموعة (h)
إذن H هي نقطة تقاطع $[DM]$ و $[AN]$
حيث N ، M نقطتان من $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب و $AM = BN$ ،
مما سبق لدينا مهما كانت النقطة M من القطعة المستقيمة $[AB]$ فإن :
المثلث AHD قائم في H
وبالتالي H هي نقطة من القوس AO للدائرة ذات القطر $[AD]$
ومنه المجموعة (h) محتواة في القوس AO
- لتكن H نقطة من القوس AO
(DH) يقطع $[AB]$ في M و (AH) يقطع $[BC]$ في N
لنبرهن أن $AM = BN$:
نقارن بين المثلثين ADM و ABN لدينا : $AD = AB$
$M\hat{A}D = A\hat{B}N = 90°$ و $A\hat{D}M = B\hat{A}N$ يحصران نفس القوس AH

إذن المثلثان ADM و ABN متقايسان ومنه $AM = BN$
وبالتالي H هي نقطة من المجموعة (h) أي : AO محتواة في (h)
خلاصة : $(AO) = (h)$.

4) تعيين مجموعة النقط S منتصف $[MN]$ عندما M تمسح $[AB]$:
نسمي المجموعة المطلوبة (s) ،



- نأخذ M منطبقة على A فإن N تكون منطبقة على B
وبالتالي $[MN]$ هي القطعة $[AB]$.
إذن المجموعة (s) تشمل النقطة E منتصف $[AB]$.
نأخذ M منطبقة على B فإن N تكون منطبقة على C
وبالتالي $[MN]$ هي القطعة $[BC]$.
إذن المجموعة (s) تشمل كذلك النقطة F منتصف $[BC]$.
إذن المجموعة (s) غير خلية.



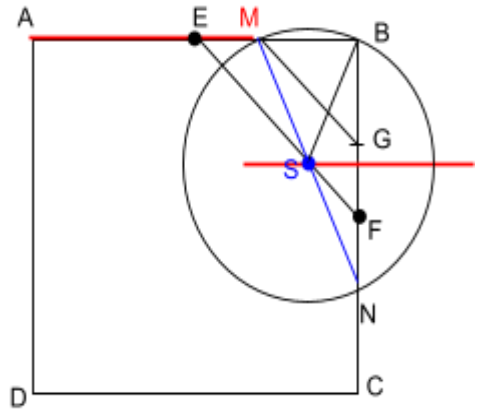
- لتكن S نقطة من المجموعة (s) إذن النقط S منتصف $[MN]$
G هي المسقط العمودي للنقطة S على (BC).
في المثلث MBN لدينا : (SG) // (MB) و S منتصف $[MN]$
إذن حسب نتائج مبرهنة طاليس لدينا G منتصف $[NN]$ و $MB = 2\ SG$
لدينا : $AE = EB = BF$ و $AM = BN$ إذن : $ME = NF$
ومنه : $MB = ME + EB = NF + BF = NF + NF + BN$
ومنه : $MB = 2\ NF + 2\ NG = 2(NF + NG) = 2GF$

بما أن $MB = 2\ SG$ فإن $SG = GF$ منه المثلث SGF قائم ومتساوي الساقين وبالتالي : $\hat{SFG} = 45°$

ولدينا المثلث EBF ومتساوي الساقين إذن $\hat{EFB} = 45°$ أي : $\hat{EFG} = 45°$ ومنه : $\hat{SFG} = \hat{EFG}$

وبالتالي النقط S تنتمي إلى القطعة $[EF]$ إذن : $(s) \subset [EF]$

- لتكن S نقطة من القطعة $[EF]$



نعين M من $[AB]$ و N من $[BC]$ حيث $SM = SN = SB$

لدينا : $\hat{MSB} + \hat{SMB} + \hat{MBS} = 180°$

و $\hat{BSN} + \hat{SBN} + \hat{NBS} = 180°$

ومنه : $\hat{MSB} + 2\hat{MBS} = 180°$ و $\hat{BSN} + 2\hat{SBN} = 180°$

إذن : $\hat{MSB} + 2\hat{MBS} + \hat{BSN} + 2\hat{SBN} = 360°$

أي : $\hat{MSN} + 2\hat{MBN} = 360°$ ومنه : $\hat{MSN} + 180° = 360°$

إذن $\hat{MSN} = 180°$ وبالتالي N ، S ، M في استقامية ومنه : النقط S منتصف $[MN]$
G نقطة من $[BC]$ حيث $BG = NC$ بما أن F منتصف $[BC]$ فإن F منتصف $[GN]$ كذلك
ولدينا النقط S منتصف $[MN]$ إذن بتطبيق نتائج مبرهنة طاليس في المثلث NGM نجد (SF) // (GM)

ومنه : (EF) // (GM) إذن : $\hat{BMG} = \hat{BEF} = 45°$ و $\hat{BGM} = \hat{BFE} = 45°$ ومنه :

$\hat{BMG} = \hat{BGM} = 45°$ إذن المثلث BMG متساوي الساقين وبالتالي : $BG = BM$

بما أن $BG = NC$ فإن : $BM = NC$ ومنه : $AM = BN$ إذن: S تنتمي إلى (s) إذن : $[EF] \subset (s)$

خلاصة : لدينا : $(s) \subset [EF]$ و $[EF] \subset (s)$ إذن : $(s) = [EF]$.