



Теоретичні відомості

Задачі з параметрами відіграють важливу роль у формуванні логічного мислення учнів. Але їх розв’язування викликає у дітей значні ускладнення. Це пов’язане з тим, що кожне рівняння з параметром представляє собою цілий клас рівнянь різного типу, для кожного з яких потрібно отримати розв’язок.

Якщо в рівнянні деякі коефіцієнти задані не конкретними числовими значеннями, а позначені буквами, то вони називаються **параметрами**, а рівняння **параметричним**. **Розв’язати рівняння** – це означає: знати множину значень невідомої величини, яка задовольняє дане рівняння. Іноді рівняння, крім букв, що позначають невідоме число x, y, z містять інші букви a, b, c . Тоді ми маємо справу не з одним, а з нескінченною множиною рівнянь.

При одних значеннях параметрів рівняння не має розв’язків, при інших – має тільки один або два розв’язки. Важливим етапом розв’язування рівнянь з параметрами є запис відповіді. Особливо це ставиться до тих прикладів, де розв’язання як би «гілкується» залежно від значень параметра. В цих випадках запис відповіді – це збір раніше отриманих результатів. І тут дуже важливо не забути врахувати всі етапи розв’язання.

Розв’язати рівняння з параметрами означає з’ясувати, при яких значеннях параметрів рівняння має корені і знайти їх (як правило, залежно від параметрів, тобто розв’язування рівняння повинно супроводжуватись дослідженням).

Методи і способи розв’язування рівнянь з параметрами різноманітні, пов’язані з видами самих рівнянь.

Класифікація рівнянь:

- Лінійні рівняння $ax + b = 0$, де x – змінна, a, b – деякі числа;
- Квадратні рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де x – змінна, a, b, c – які числа, причому $a \neq 0$;
- Дробово-раціональні рівняння;
- Ірраціональні рівняння;
- Показникові рівняння;



$$ax = b$$

Лінійні рівняння з параметром

- Логарифмічні рівняння;
- Тригонометричні рівняння.

Найпростіші з рівнянь – лінійні рівняння з параметрами. Зазначимо, що будь-яке лінійне рівняння можна записати у вигляді $ax = b$, де a і b – деякі числа, x – змінна.

якщо $a = 0$ і $b = 0$, то рівняння $ax = b$ має безліч коренів, тобто усі числа;

якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то рівняння $ax = b$ коренів не має;

якщо $a \neq 0$, то при будь-якому значенні b рівняння $ax = b$ має єдиний корінь $x = \frac{b}{a}$;

Наприклад, у рівнянні $ax - 5 = 7$, x — змінна величина, яку треба знайти залежно від параметра a . Перетворивши це рівняння, дістанемо: $ax = 12$.

Отже, при $a \neq 0$ маємо $x = \frac{12}{a}$;

при $a = 0$ рівняння коренів не має.

Приклади задач з розв'язанням

Приклад 1. Розв'язати рівняння $ax - 3 = b$ залежно від параметрів a і b .

Розв'язання.

Виконавши у рівнянні $ax - 3 = b$ тотожні перетворення, дістанемо: $ax = b + 3$.

- Якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{b+3}{a}$ при будь-якому b ;
- якщо $a = 0$, то при $b = -3$ рівняння набуває вигляду $0x = 0$, тобто коренями рівняння є всі числа;
- якщо $a = 0$ і $b \neq -3$, дістанемо $0x = b + 3$, причому $b + 3 \neq 0$, така рівність неможлива, тому рівняння коренів не має.

Відповідь. При $a \neq 0$ і будь-якому b рівняння має один корінь $x = \frac{b+3}{a}$;

при $a = 0$ і $b = -3$ корені рівняння — всі числа;

при $a = 0$ і $b \neq -3$ коренів немає.



$$ax = b$$

Лінійні рівняння з параметром

Приклад 2. При яких значеннях параметра a рівняння $|x| = a$.

а) не має коренів; б) має тільки один корінь; в) має два корені.

Розв'язання.

а) рівняння не має коренів, якщо a – від'ємне число;

б) рівняння має один корінь, якщо $a = 0$, тоді $|x| = 0$, $x = 0$;

в) рівняння має два корені, якщо a – додатне число, маємо $|x| = a$, $x_1 = a$; $x_2 = -a$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(a-1)(a+1)x - a - 1 = 0$ залежно від значень параметра a .

Розв'язання.

Перепишемо рівняння у вигляді: $(a-1)(a+1)x = a+1$.

Добуток $(a-1)(a+1)$ дорівнює нулю при $a = 1$ або $a = -1$, тому розглянемо такі випадки:

1) при $a = 1$ рівняння набуває вигляду $0x = 2$, тому коренів не має;

2) при $a = -1$ дістанемо рівняння $0x = 0$, корені якого – всі числа;

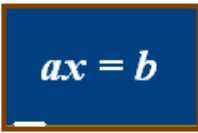
3) при $|a| \neq 1$, $(a-1)(a+1) \neq 0$, тому $x = \frac{a+1}{(a-1)(a+1)}$, $x = \frac{1}{a-1}$.

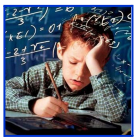
Відповідь. При $|a| \neq 1$ $x = \frac{1}{a-1}$;

при $a = -1$ корені рівняння — всі числа;

при $a = 1$ коренів немає.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $|ax - 1| = |x + 3|$.





$$ax = b$$

Лінійні рівняння з параметром

$$\text{при } a = 1 \quad x = -\frac{2}{a+1}.$$

5. Знайдіть усі цілі значення a , при яких корінь рівняння $ax = 4$ є цілим числом.

Розв'язання.

Якщо $a = 0$, маємо $0x = 4$, рівняння коренів не має.

Якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{4}{a}$.

За умовою $\frac{4}{a}$ – ціле число, це можливо, якщо a приймає значення $-4; -2; -1; 1; 2; 4$.

Задачі до даної теми

1¹. При якому значенні a рівняння: а) $ax = -2$ не має коренів;

б) $(a+3)x - 3 = a$ має коренем будь-яке число;

в) $|x-1| + |x-a| = 5$ має безліч коренів.

2¹. Розв'яжіть рівняння залежно від параметрів a і b :

а) $4 + bx = a$; б) $4 = a - (bx - 1)$.

3¹. Розв'яжіть рівняння залежно від параметра a :

а) $ax - 3(1+x) = 5$; б) $(a^2 - 9)x = a + 3$; в) $|3 - 2x| = a$.

4². Визначити значення параметра a , при якому рівняння має безліч розв'язків:
 $a^2(x-1) + a(3x-1) + 2x = 0$. (Відповідь: -1 .)

5². Визначити значення параметра a , при якому рівняння не має розв'язків:

$$(a^2 + 2)x = (2 - 3x) + 2. \quad (\text{Відповідь: } -2.)$$



$$ax = b$$

Лінійні рівняння з параметром

- 6². При яких цілих значеннях параметра a рівняння $a^2x + 2ax = 1 - 2a$ має цілі корені? (Відповідь: $-1; 3$.)
- 7³. При якому значенні параметра b рівняння $(b^2 - 2b)x = b^2 - 4$ має безліч розв'язків? (Відповідь: $b = 2$.)
- 8³. При якому значенні параметра c рівняння $c^2(x-1) + 2x + c(3x-1) = 0$ має безліч розв'язків? (Відповідь: $c = -1$.)
- 9³. При якому значенні параметра a рівняння $(a-3)(a-4)x = a^2 - 16$ не має розв'язку? (Відповідь: $a = 3$.)
- 10⁴. Визначити при яких значеннях n рівняння $\frac{4x+3n}{3} = \frac{5x-2n}{4}$ має додатні розв'язки. (Відповідь: $k < 0$.)
- 11⁴. При якому значенні параметру k рівняння $3k + 3(x+1) = \frac{3kx+15}{5}$ не має розв'язку? (Відповідь: $k = 5$.)
- 12⁴. Визначити при яких значеннях параметра a корні рівняння $ax = 7x - 1$ кратні 5.
(Відповідь: $a = 7 - \frac{1}{5m}, m = 1, 2, 3, \dots$.)
- 13⁴. При яких значеннях параметра a всі розв'язки рівняння $2|x-a| + a - 4 + x = 0$ задовольняють нерівність $0 \leq x < 4$? (Відповідь: $a \in \left[\frac{4}{3}; 2\right)$.)
- 14⁴. При яких значеннях параметра a рівняння $a^3 + a^2|x+a| + |a^2x+1| = 1$ має не менше чотирьох цілих коренів? (Відповідь: $a \in (-\infty; -3] \cup \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{1}{2}\right)$.)
- 15⁴. При яких значеннях параметра a рівняння $2x - |x - a^2| = 11a - 3|x + 4a|$:
а) не має розв'язків; б) має кінцеву непорожню множину розв'язків?

Список рекомендованої літератури до підготовки з даної теми:



Лінійні рівняння з параметром

$$ax = b$$

1. Горгеладзе Ш. Г. Збірник конкурсних задач з математики: Навчальний посібник. / Горгеладзе Ш. Г., Кухарчук М. М., Яремчик Ф. П. – Київ: Вища школа, 1988. – 328 с.
2. Горнштейн П. И. Задачи с параметрами. / Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якір М. С. – Київ: РИА «Текст»; МП «ОКЛ», 1992. – 290 с.
3. Доманська І. П. Рівняння з параметрами: Методичні рекомендації. / Доманська І. П., Зеліско Г. В., Стахів Л. Л. – Львів: Видавн. центр ЛДУ ім. І. Франка, 2005.
4. Кушнір И.А. Шедеври школьной математики. т.1, т.2. / Кушнір И.А. – Київ: «Астарт», 1995. – 510 с.
5. Сержук С.В. Рівняння з параметрами // Математика в школах України, № 17-18, 2004.
6. Цегелик Г.Г. Збірник типових конкурсних тестових завдань з математики: Навчальний посібник./ Цегелик Г.Г. –Львів: Видавн. центр ЛДУ ім. І. Франка, 2005. – 140 с.