Câu 1. **[2D1-6.14-4] (Hội các trường chuyên 2019 lần 3)** Cho hai đường cong $(H): y = m + \dfrac{1}{x}$ và $(P): y = x^2 + x - 1$. Biết (P) và (H) cắt nhau tại 3 điểm phân biệt sao cho đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính bằng 2. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \in (-6;1)$. **B.** $m \in (6;+\infty)$. **C.** $m \in (-\infty;-6)$. **D.** $m \in (1;6)$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Anh Đào; Fb: Đào Nguyễn

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (H):

$$m + \frac{1}{x} = x^2 + x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^3 + x^2 - (m+1)x - 1 = 0 \ (1) \end{cases}.$$

Đặt $f(x) = x^3 + x^2 - (m+1)x - 1$.

Giả sử $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (P) và (H). Ta có $f(x_0) = 0$.

Mặt khác, ta có $y_0 = x_0^2 + x_0 - 1 \Rightarrow y_0^2 = x_0^4 + 2x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 + 1$.

$\Leftrightarrow y_0^2 = (x_0 + 1) f(x_0) + (m-1)x_0^2 + mx_0 + 2$

$\Leftrightarrow y_0^2 = (m-1)x_0^2 + mx_0 + 2$, $(\text{do } f(x_0) = 0)$

$\Leftrightarrow y_0^2 = -x_0^2 + mx_0^2 + mx_0 + 2 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - m(x_0^2 + x_0 - 1) - (m+2) = 0$

$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - my_0 - (m+2) = 0$. (2)

Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đường tròn có bán kính bằng 2 khi và chỉ khi (2) là phương trình đường tròn có bán kính bằng 2 $\Leftrightarrow \dfrac{m^2}{4} + m + 2 = 4 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 - 2\sqrt{3} \\ m = -2 + 2\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Thay $m = -2 - 2\sqrt{3}$ vào (1) thấy phương trình chỉ có 1 nghiệm nên loại.

Thay $m = -2 + 2\sqrt{3}$ vào (1) thấy phương trình có 3 nghiệm nên nhận.

Vậy $m \in (1;6)$.