УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Введение

Во многих (и Вы еще убедитесь в этом!) так называемых задачах…"торчат уши квадратного трехчлена". (Черкасов А.Ю. Якушев А.Г.)

Практически все, что окружает современного человека - это все так или иначе связано с математикой. А последние достижения в физике, технике и информационных технологиях не оставляют никакого сомнения, что и в будущем положение вещей останется прежним. Поэтому решение многих практических задач сводится к решению различных видов уравнений, которые необходимо научиться решать.

Цель работы: Выявить способы решения уравнения второй степени.

Задачи:

1) Познакомиться с историческими фактами, связанными с данным вопросом.
2) Описать технологии различных существующих способов решения уравнений второй степени.
3) Провести анализ этих способов, сравнить их.
4) Привести примеры применения различных способов решения уравнений.
5) Составить задачник по теме.

Объект исследования: уравнения второй степени.

Предмет исследования: способы решения уравнений второй степени.

Уравнения - это наиболее объёмная тема всего курса математики.

Данная работа является попыткой обобщить и систематизировать изученный материал по выше указанной теме.

Я расположил материал по степени его сложности, начиная с самого простого. В него вошли как известные нам виды уравнений из школьного курса алгебры, так и дополнительный материал.

В те далекие времена, когда мудрецы впервые стали задумываться о равенствах содержащих неизвестные величины, наверное, еще не было ни монет, ни кошельков. Но зато были кучи, а также горшки, корзины, которые прекрасно подходили на роль тайников-хранилищ, вмещающих неизвестное количество предметов. "Ищется куча, которая вместе с двумя третями ее, половиной и одной седьмой составляет 37.", - поучал во II тысячелетии до новой эры египетский писец Ахмес.

В древних математических задачах Междуречья, Индии, Китая, Греции неизвестные величины выражали число павлинов в саду, количество быков в стаде, совокупность вещей, учитываемых при разделе имущества. Хорошо обученные науке счета писцы, чиновники и посвященные в тайные знания жрецы довольно успешно справлялись с такими задачами.

Дошедшие до нас источники свидетельствуют, что древние ученые владели какими-то общими приемами решения задач с неизвестными величинами. Однако ни в одном папирусе, ни в одной глиняной табличке не дано описания этих приемов. Авторы лишь изредка снабжали свои числовые выкладки скупыми комментариями типа: "Смотри!", "Делай так!", "Ты правильно нашел". В этом смысле исключением является "Арифметика" греческого математика Диофанта Александрийского (III в.) - собрание задач на составление уравнений с систематическим изложением их решений.

Уравнения второй степени умели решать еще в древнем Вавилоне. Математики Древней Греции

решали квадратные уравнения геометрически; например, Евклид - при помощи деления отрезка в среднем и крайнем отношениях. Задачи, приводящие к квадратным уравнениям, рассматриваются во многих древних математических рукописях и трактах.
Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета. Итальянские математики Тарталья, Кардано, Бомбелли среди первых в XVI в. учитывают, помимо положительных и отрицательные корни. Лишь в XVII в. благодаря трудам Жирара, Декарта, Ньютона и других ученых способ решения квадратных уравнений принимает современный вид.
Квадратные уравнения.
Квадратным уравнением называют уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где коэффициенты a, b, c - любые действительные числа, причём, $a\neq0$. Коэффициенты a, b, c, различают по названиям: a - первый или старший коэффициент; b - второй или коэффициент при x; c - свободный член, свободен от переменной x.
Квадратное уравнение также называют уравнением второй степени, так как его левая часть есть многочлен второй степени. Квадратное уравнение называют приведенным, если старший коэффициент равен 1; квадратное уравнение называют неприведенным, если старший коэффициент отличен от 1. $x^2+px+q=0$ - стандартный вид приведенного квадратного уравнения
Кроме приведенных и неприведенных квадратных уравнений различают также полные и неполные уравнения.
Полное квадратное уравнение - это квадратное уравнение, в котором присутствуют все три слагаемых; иными словами, это уравнение, у которого коэффициенты b и c отличны от нуля.
Неполное квадратное уравнение - это уравнение, в котором присутствуют не все три слагаемых; иными словами, это уравнение, у которого хотя бы один из коэффициентов b и c равен нулю.
Обратите внимание: об ax^2 речи нет, этот член всегда присутствует в квадратном уравнении.
Корнем квадратного уравнения $ax^2+вx+c=0$ называют всякое значение переменной x, при котором квадратный трехчлен ax^2+bx+c обращается в нуль; такое значение переменной x называют также корнем квадратного трехчлена.
Можно сказать и так: корень квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ - это такое значение x, подстановка которого в уравнение обращает уравнение в верное числовое равенство.0=0.
Решить квадратное уравнение - это значит найти все его корни или установить, что их нет.

1. Способы решения квадратных уравнений

1. СПОСОБ: *Разложение левой части уравнения на множители.*

2. СПОСОБ: *Метод выделения полного квадрата.*

3. СПОСОБ: *Решение квадратных уравнений по формуле.*

4. СПОСОБ: *Графическое решение квадратного уравнения.*

Все вышеперечисленные способы подробно разобраны в учебнике, поэтому на них я не буду останавливаться.

5. СПОСОБ: *Решение уравнений с использованием теоремы Виета.*

Приведённые квадратные уравнения легко решать по теореме Виета. Достаточно найти два числа такие, произведение которых равно свободному члену, а сумма - второму коэффициенту с противоположным знаком.

Например, для уравнения $x^2-7x+12=0$ Нужно найти числа, произведение которых равно 12, а сумма 7. Такими числами будут 3 и 4. Значит $x_1=3$, $x_2=4$

Но можно использовать этот метод и для уравнений с первым коэффициентом не равным единице. Поясним на примере.

Допустим, нужно решить уравнение $3x^2+2x-5=0$

Берём первый коэффициент и умножаем его на свободный член: $x^2+2x-15=0$

Корнями этого уравнения будут числа, произведение которых равно - 15, а сумма равна - 2. Эти числа - 5 и 3. Чтобы найти корни исходного уравнения, полученные корни делим на первый коэффициент. Таким образом $x_1=-5/3$, $x_2=1$

6. СПОСОБ: *Решение уравнений способом "переброски".*

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Умножая обе его части на а, получаем уравнение $a^2x^2 + abx + ac = 0$.

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению $y^2 + by + ac = 0$,равносильно данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета.

Окончательно получаем $x_1 = y_1/a$ и $x_1 = y_2/a$.

При этом способе коэффициент *a* умножается на свободный член, как бы "перебрасывается" к нему, поэтому его называют *способом "переброски"*. Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

Решим уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0$.

Решение. "Перебросим" коэффициент 2 к свободному члену и сделав замену получим уравнение $y^2 - 11y + 30 = 0$.

Согласно обратной теореме Виета

$y_1 = 5$ $x_1 = 5/2$ $x_1 = 2,5$

$y_2 = 6$ $x_2 = 6/2$ $x_2 = 3$.

Ответ: $x_1=2,5$; $x_2= 3$.

7. СПОСОБ: *Свойства коэффициентов квадратного уравнения.*

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, а ≠ 0.

1. Если $a+ b + c = 0$ *(т.е. сумма коэффициентов уравнения равна нулю), то* $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.

2. *Если* $a - b + c = 0$, *или* $b = a + c$, *то* $x_1 = - 1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

1. Решим уравнение $345x^2 - 137x - 208 = 0$.

Решение. Так как a + b + c = 0 (345 - 137 - 208 = 0), то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-208}{345}$. *Ответ*: $x_1=1$; $x_2 = -\frac{208}{345}$.

. Решим уравнение $132x^2 + 247x + 115 = 0$

Решение. Т.к. a-b+c = 0 (132 - 247 +115=0), то

$x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{115}{132}$ *Ответ:* $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{115}{132}$

8. СПОСОБ: *Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.*

Графический способ решения квадратных уравнений с помощью параболы неудобен. Если строить параболу по точкам, то потребуется много времени, и при этом степень точности получаемых результатов невелика. Предлагаем следующий способ нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с помощью циркуля и линейки. Допустим, что искомая окружность пересекает ось абсцисс в точках B (x_1; 0) и D (x_2; 0), где x_1 и x_2 - корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, и проходит через точки A (0; $\frac{c}{a}$) и C (0; $\frac{c}{a}$) на оси ординат. Тогда по теореме о секущих имеем $OB \cdot OD = OA \cdot OC$, откуда

$$OC = \frac{OB \cdot OD}{OA} = \frac{x_1 \cdot x_2}{1} = \frac{c}{a}.$$

Рис. 1.

Центр окружности находится в точке пересечения перпендикуляров SF и SK, восстановленных в серединах хорд AC и BD, поэтому

$$SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a}, \quad SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a+c}{2a}.$$

Итак:

1) построим точки S ($-\frac{b}{2a}$; $\frac{a+c}{2a}$) (центр окружности) и A (0; 1);
2) проведем окружность с радиусом SA;
3) абсциссы точек пересечения этой окружности с осью Ox являются корнями квадратного уравнения.

При этом возможны три случая.

1) Радиус окружности больше ординаты центра ($AS > SK$, или $R > \frac{a+c}{2a}$), окружность пересекает ось Ox в двух точках (рис. а) B (x_1; 0) и D (x_2; 0), где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

2) Радиус окружности равен ординате центра ($AS = SB$, или $R = \frac{a+c}{2a}$), окружность касается оси Ox (рис. б) в точке B (x_1; 0), где x_1 - корень квадратного уравнения.

3) Радиус окружности меньше ординаты центра ($AS < SB$, или $R < \frac{a+c}{2a}$), окружность не имеет общих точек с осью абсцисс (рис. в), в этом случае уравнение не имеет решения.

а) б) в)

Рис. 2. Рис.3.

1. Решим уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Решение. Определим координаты точки центра окружности по формулам:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1,$$

$$y = \frac{a+c}{2a} = \frac{1-3}{2 \cdot 1} = -1.$$

Проведем окружность радиуса *S A*, где *A* (0;

).*Ответ*: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

9. СПОСОБ: *Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.*

Это старый и незаслуженно забытый способ решения квадратных уравнений, помещенный на с.83 (*см. Брадис В.М.* Четырехзначные математические таблицы. - м., просвещение).

Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$. Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.

Рис. 4.

Криволинейная шкала номограммы построена по формулам:

$$OB = \frac{a}{1+z},$$

$$AB = \frac{-z^2}{1+z}.$$

Полагая $OC = p$, $ED = q$, $OE = a$ (все в см), из подобия треугольников *CAH* и *CDF* получим пропорцию

$$\frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB}.$$

Рис. 5.

Отсюда после подстановок и упрощений вытекает уравнение $z^2 + pz + q = 0$, причем буква z означает метку любой точки криволинейной шкалы.

1. Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$. Номограмма дает корни $z_1 = 8$ и $z_2 = 1$ (рис.12).

2. Решим с помощью номограммы уравнение $2z^2 - 9z + 2 = 0$.

Разделим коэффициенты этого уравнения на 2, получим уравнение $z^2 - 4{,}5 + 1 = 0$.

Номограмма дает корни $z_1 = 4$ и $z_2 = 0{,}5$.

10. СПОСОБ: *Геометрический способ решения квадратных уравнений.*

В древности, когда геометрия была более развита, чем алгебра, квадратные уравнения решали не алгебраически, а геометрически. Приведем ставший знаменитым пример из "Алгебры" ал-Хорезми.

Решим уравнение $x^2 + 10x = 39$.

В оригинале эта задача формулируется следующим образом: "Квадрат и десять корней равны 39".

Решение. Рассмотрим квадрат со стороной x, на его сторонах строятся прямоугольники так, что другая сторона каждого из них равна $2\frac{1}{2}$, следовательно, площадь каждого равна $2\frac{1}{2}x$. Полученную фигуру дополняют затем до нового квадрата *ABCD*, достраивая в углах четыре равных квадрата, сторона каждого из них $2\frac{1}{2}$, а площадь $6\frac{1}{4}$.

D x C

$6\frac{1}{4}$. $2\frac{1}{2}x$ $6\frac{1}{4}$.		

$2\frac{1}{2}x$ x^2

$2\frac{1}{2}x$		
$6\frac{1}{4}$. $2\frac{1}{2}x$ $6\frac{1}{4}$.		

A x B

Площадь *S* квадрата *ABCD* можно представить как сумму площадей: первоначального квадрата x^2, четырех прямоугольников

($4 \cdot 2\frac{1}{2}x = 10x$) и четырех пристроенных квадратов ($6\frac{1}{4} \cdot 4 = 25$), т.е.
$S = x^2 + 10x = 25$. Заменяя $x^2 + 10x$ числом 39, получим что $S = 39 + 25 = 64$, откуда следует, что сторона квадрата *ABCD*, т.е. отрезок *AB* = 8. Для искомой стороны *x* первоначального квадрата получим $x = 8 - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3$.

11. СПОСОБ: *Решение уравнений с использованием теоремы Безу.*

При делении P (x) на $x-\alpha$ в остатке может получиться лишь некоторое число r (если r = 0, то деление выполняется без остатка): $P(x) = (x - \alpha) Q(x) + r$. (1)

Чтобы найти значение r, положим в тождестве (1) $x = \alpha$. При этом двучлен $x - \alpha$ обращается в нуль, получаем, что $P(\alpha) = r$.

Итак, доказано утверждение, называемое теоремой Безу.

Теорема 1 (Безу). Остаток от деления многочлена P (x) на двучлен $x - \alpha$ равен $P(\alpha)$ (т.е. значению P (x) при $x = \alpha$).

Если число α является корнем многочлена P (x), то этот многочлен делится на $x - \alpha$ без остатка.

$x^2-4x+3=0$
$P_2(x) = x^2-4x+3$
α; ±1,±3. $\alpha=1$, $1-4+3=0$
Разделим p (x) на (x-1)
$(x^2-4x+3) / (x-1) = x-3$
$x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$
$(x-1)(x-3)=0$
<=> x-1=0; x1=1, или x-3=0, x2=3; Ответ: x1=1, x2=3.

Заключение

Человечество прошло длительный путь от незнания к знанию, непрерывно заменяя на этом пути неполное и несовершенное знание все более полным и совершенным.
В ходе выполнения своей исследовательской работы я считаю, что с поставленной целью и задачами я справился, мне удалось обобщить и систематизировать изученный материал по выше указанной теме.
Располагая материал по степени его сложности, начиная с самого простого, составил небольшой задачник, в него вошли уравнения, которые нужно решить разными способами, предложена краткая теория, примеры решения уравнений.
Способов решения квадратных уравнений очень много. Мы нашли 11 способов решения квадратных уравнений. Нужно отметить, что не все они удобны для решения, но каждый из них уникален. Некоторые способы решения помогают сэкономить время, что немаловажно при решении заданий на ГИА. Для того чтобы усвоить все методы решения уравнений, нужно прорешать несколько уравнений изучаемым способом. А для этого нужны задания.
Подводя итоги, можно сделать вывод: квадратные уравнения играют огромную роль в математике. Эти знания могут пригодиться нам на протяжении всей жизни, а так как эти методы решения квадратных уравнений просты в применении, то они, безусловно, должны заинтересовать увлекающихся математикой школьников.

Литература

1) Мордкович А.Г. М 79 Алгебра. 8 класс: В двух частях. Ч.1: Учебник для общеобразовательных учреждений. - 4-е издание - М.: Мнемозина, 2002. - 223 с.:
2) Гусев В.А., Мордкович А.Г. Математика: Справочные материалы: Книга для учащихся. - М.: Просвещение, 1988
3) Глейзер Г.И. История математики в школе. - М.: просвещение, 1982
4) Брадис В.М. Четырехзначные математические таблицы для средней школы. - м., просвещение, 1990
5) Окунев А.К. Квадратичные функции, уравнения и неравенства. Пособие для учителя. - М.: Просвещение, 1972
6) Пресман А.А. Решение квадратного уравнения с помощью циркуля и линейки.М., Квант, №4/72. С.34.
7) Дидактические материалы по алгебре. М., Математика (приложение к газете "Первое сентября"), №№ 21/96, 10/97.