

1- GAZ PARFAIT CLASSIQUE :

Un gaz parfait est composé de $N \gg 1$ atomes identiques est en équilibre à la température T , la pression P et de volume V . On notera par μ , le potentiel chimique à l'équilibre.

- a- Dans l'approximation semi classique, les atomes étant identiques, calculer la grande fonction de partition du gaz.
- b- En déduire Ω , le grand potentiel du gaz en fonction de T , V et μ .
- c- Montrer que $\Omega = -PV$
- d- Etablir l'équation d'état du gaz.

2- DENSITÉ DES ÉTATS

Un gaz de particules élémentaires est décrit par son spectre énergétique $\{\epsilon_j\}$. Dans l'approximation semi classique, on peut calculer la densité des états quantiques, c'est dire, le nombre d'états ayant l'énergie comprise dans l'intervalle $[\epsilon, \epsilon+d\epsilon]$ que l'on notera dans toute la suite $\varphi(\epsilon)$.

a- Justifier l'utilisation de l'approximation semi classique.

b- Calculer cette densité dans les cas suivants :

- Hamiltonien classique : $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$, à 2 et 3 dimensions
- Particule ultra relativiste : $\epsilon = |\vec{p}|c$
- Particule sans masse : $\epsilon = \hbar \omega$ avec $\vec{p} = \hbar \vec{k}$

3- CONDENSATION DE BOSE – EINSTEIN

Un gaz parfait de Bosons (particules élémentaires) à trois dimensions est décrit par les paramètres de l'équilibre : T , V et μ . On cherche à montrer que ce gaz se condense au dessous d'une certaine température T_0 (température de Bose).

- a- En admettant que $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ pour chaque particule, définir et calculer la densité des états semi classiques.
- b- Montrer en général, que le potentiel chimique des Bosons est négatif.
- c- Ecrire le grand potentiel, le nombre total de particules et l'énergie totale sous une forme intégrale.
- d- Définir T_0 et donner son expression en fonction d'une intégrale constante.

- e- Montrer en plus, que le potentiel chimique est une fonction décroissante de la température, à densité constante.
- f- Le calcul du nombre de Bosons $N_{E=0}$ qui occupent l'état fondamental étant impossible par la densité calculée en a). On calculera d'abord $N_{E>0}$ et on utilise le fait que le nombre total de Bosons est $(N_{E=0} + N_{E>0}) = N$.

Justifier cette hypothèse et montrer que :

$$N_{E=0} = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \text{ Lorsque } T \leq T_0$$

$$\text{Et } N_{E=0} = 0 \text{ ailleurs}$$

- e- Tracer les diagrammes $N_{E=0}(T)$ et $\mu(T)$.

4- ABSENCE DE CONDENSATION 2D

Dans le cas du gaz parfait de Bosons à deux dimensions, et dans les mêmes hypothèses que l'exercice 3), on se propose de montrer l'absence de condensation de Bose Einstein. Pour cela :

- a- Définir et calculer la densité des états semi classiques à deux dimensions.
- b- Ecrire le nombre total de particules sous une forme intégrale.
- c- Montrer que la température pour laquelle le potentiel chimique devient nul est $T_0=0K$.
- d- Conclure et comparer les digrammes 2D avec ceux obtenus pour 3D.

5- FERMIONS À 0K

Un gaz parfait de $N \gg 1$ fermions est en équilibre pour les variables T , V et μ .

- a- Définir l'énergie de Fermi ainsi que le niveau de Fermi.
- b- Montrer qu'à l'état fondamental, la population moyenne d'un état quantique est :

$$n_j = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_j \leq \mu \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- c- Calculer la densité des états dans l'approximation semi classique. En déduire le nombre total de Fermions sous une forme intégrale.
- d- Calculer ε_F , l'énergie de Fermi en fonction de la densité sous la forme : $\varepsilon_F = \lambda \left(\frac{N}{V} \right)^\alpha$ avec λ et α deux constantes indépendantes du volume et de N .
- e- Déduire la vitesse maximale des Fermions

6- GAZ PARFAIT ULTRA RELATIVISTE

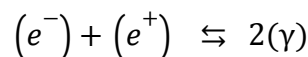
Un gaz électronique est en équilibre à la température **T** et occupe un volume **V**. Soit **ε** l'énergie cinétique d'une particule qu'on supposera ultra-relativiste : **ε = p.c** , où **c** est la vitesse de la lumière et **p** le module de l'impulsion de la particule de masse **m**.

A- Etude du gaz électronique ultra-relativiste par une statistique quantique

- 1- Calculer la densité des états **φ(p)**.
- 2- En déduire le nombre de particules **N** et l'énergie totale **E** sous une forme intégrale.
- 3- Montrer que le grand potentiel est **Ω = -PV = -E/3**

B- Application

A l'intérieur des étoiles, la température est très élevée. Les collisions entre les particules peuvent donner lieu à la formation de paires électroniques e^- (électron) et e^+ (positron). D'un point de vue thermodynamique, ce fait peut être assimilé à une réaction d'équilibre de création et d'annihilation selon :



Un électron entre en collision avec un positron donnant lieu à deux photons, la réaction inverse est possible à l'équilibre. Dans ces conditions de hautes températures (**$K_B T \gg mc^2$**), le gaz électronique est ultra-relativiste. On admettra que le potentiel chimique du photon est nul ($\mu_\gamma = 0$). Les potentiels chimiques de l'électron et du positron seront notés respectivement μ^- et μ^+ . Enfin, N_- et N_+ désignent les nombres d'électrons et de positrons à l'équilibre.

- 1- Déduire la relation qui existe entre les potentiels chimiques de (e^-) et (e^+) .
- 2- Sachant que $N_- = N_+$, calculer μ^- et μ^+ .
- 3- Déterminer N_- en fonction de la température.
- 4- Calculer l'énergie interne totale et comparer le résultat obtenu avec la loi de Stefan-Boltzmann.

Conclure.

$$\text{On donne } \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x + 1} dx \cong 0.18 \pi^2 \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x + 1} dx \cong \frac{7}{120} \pi^4$$