

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Кафедра прикладної математики та інформаційних технологій

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни
«ЕКОНОМЕТРІЯ»
для студентів спеціальності F1 Прикладна математика

Одеська політехніка – 2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет
«Одеська політехніка»

Кафедра прикладної математики та інформаційних технологій

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни
«ЕКОНОМЕТРІЯ»
для студентів спеціальності F1 Прикладна математика

Розглянуто та затверджено на засіданні
кафедри прикладної математики та
інформаційних технологій
Протокол № 1 від 29.08.2025р.

Одеська політехніка – 2025

Конспект лекцій з дисципліни Економетрія для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю F1 Прикладна математика, освітня програма «Математичне забезпечення комп'ютерних систем» / Укладач: Б.І. Юхименко - Одеса: Національний університет «Одеська політехніка», 2025. - 59 с.

Укладач: Юхименко Б.І., к.е.н., доцент.

Лекція 1. Введення в економетрію

Визначення економетрії. Перелік розділів математики для економетричних досліджень. Структура економетричних досліджень.

У галузі теорії економіки економетрія виділяється як особливий розділ, в якому методами математичної статистики на базі економічних даних будуються математичні моделі, здійснюється прогнозування економічних показників, визначаються їхні числові значення. В цілому економетрія визначає три галузі знань: математики, теорії економіки і статистики. Саме слово ЕКОНОМЕТРИЯ як поняття зумовлюється словами економія (управління, господарювання) і метром (вимірювання). Іншими словами, економетрія – це «вимірювання» ефективності діяльності підприємства за допомогою математичних методів. Згідно з Леонт'євим В., економетрія - це вживання кількісного економічного аналізу в самих різних галузях господарської діяльності.

При проведенні економетричних досліджень застосовуються такі розділи математики, як кореляційно-регресійний аналіз, системи масового обслуговування, імітаційне моделювання, матрично-балансові моделі. При організації виробництва в системі, заснованій на вільній конкуренції, економетричні дослідження проводяться з використанням виробничих функцій. Виробничі функції – це математична модель, побудована на основі статистичних даних методами кореляційно-регресійного аналізу. Комерційні функції, в основному функції попиту, також результат обробки статистичної інформації кореляційними методами, є засобом для дослідження ринку. Система масового обслуговування як математичний апарат використовується для дослідження причин виникнення черг. Черги виникають як у сфері обслуговування, так і у виробничій сфері, скажімо, при виконанні різних технологічних процесів. У тих випадках, коли виробництво розділено на декілька секторів, ефективність їхньої кооперації може досліджуватися, використовуючи матрично-балансову модель Леонт'єва. Імітаційне моделювання як засіб отримання інформації про функціонування самих різних систем використовується, наприклад, в дослідженні діяльності фондової біржі. Структурна схема економетрії як дисципліна наведена на рис.1.

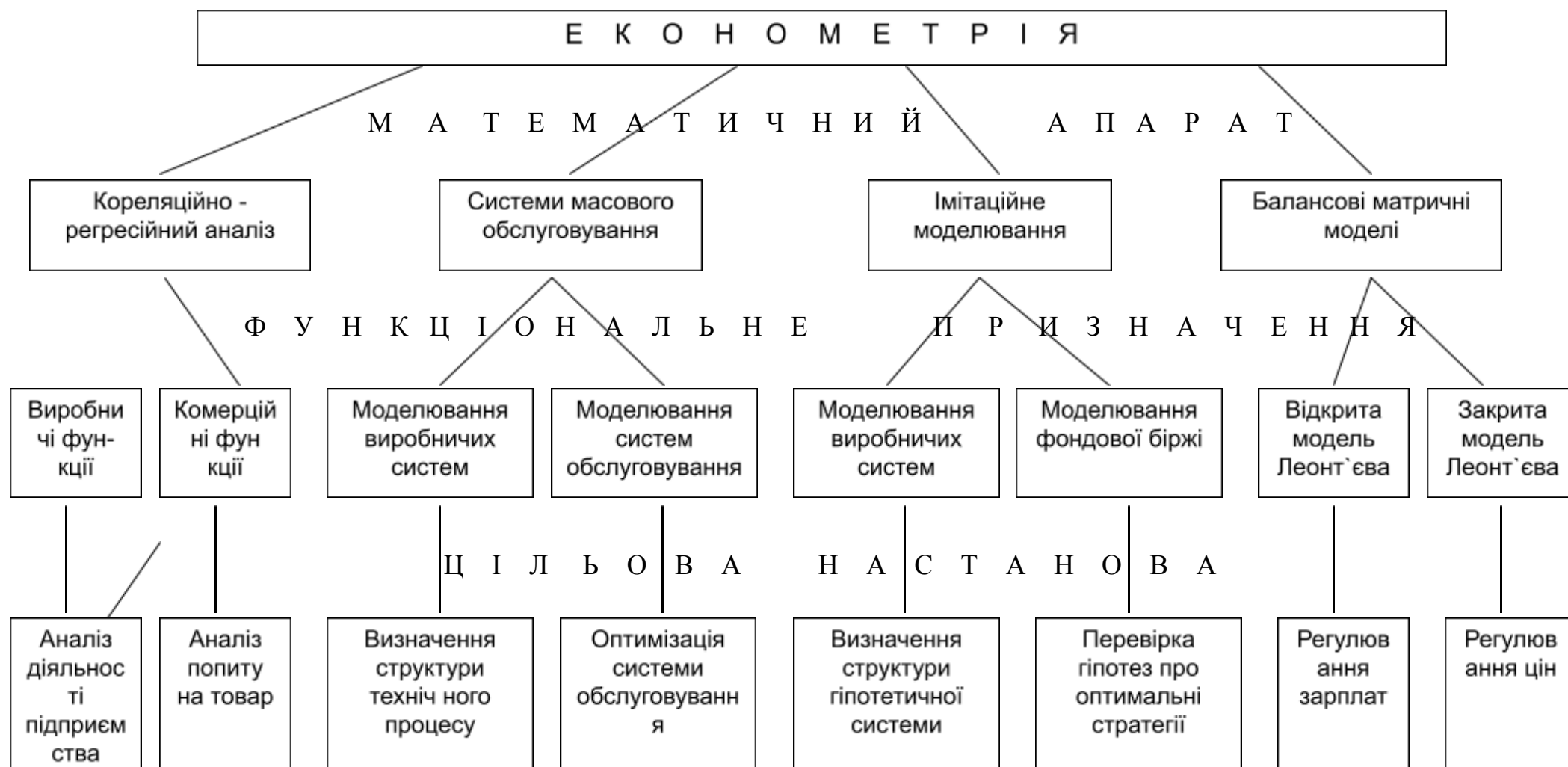


Рис.1. Структурна схема дисципліни

Перераховані галузі використання економетричних досліджень складають лише невелику частину всіх можливих досліджень даного типу. Всі ці дослідження проводяться на основі статистичних даних. Тому чекати абсолютно точних результатів немає можливості. Одержувані результати є інформацією для ухвалення рішень. Послідовність дій в економетричних дослідженнях наведена на рис.2.

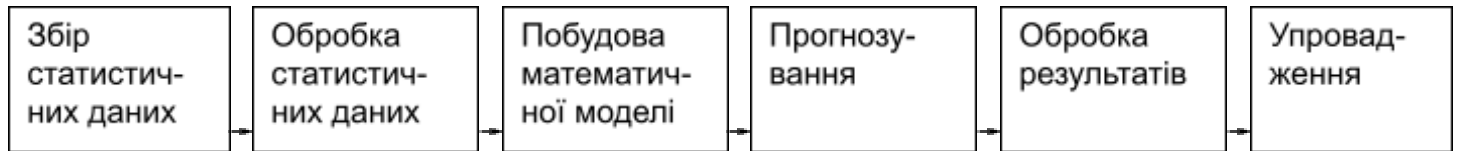


Рис.2. Послідовність дій

Можливо, що набуті прогнозні значення не влаштовують користувача результатами економетричних досліджень. У такому разі необхідно або коректування математичної моделі, або статистичні дані недостатньо коректні і не показують істинного стану справ, необхідний їх перегляд.

Запитання для самопідготовки.

1. Дайте своє визначення економетрії.
2. З якою метою використовується математичний апарат в економетричних дослідженнях?
3. Для чого необхідні статистичні дані і для чого вони використовуються?
4. Коли виникає необхідність коректування математичної моделі?

Лекція 2. Задачі кореляційно - регресійного аналізу

Призначення кореляційно-регресійного аналізу. Лінія регресії. Визначення лінії регресії. Коефіцієнти кореляції. Коефіцієнт Фішера. Коефіцієнт Ст'юдента.

Побудова кореляційних моделей дозволяє дати кількісну характеристику зв'язку, залежності і взаємній обумовленості економічних показників. Хоч модель є спрощеним віддзеркаленням дійсності, вона забезпечує строго математичний підхід до дослідження економічних залежностей. Кореляційно-регресійний аналіз (К-Ра) як математичний апарат – це метод обробки статистичних даних.

Економічна величина складається звичайно під впливом безлічі чинників. Закономірності не виявляються у сфері економіки з великою точністю і незмінністю. Тому у вивченні взаємозв'язків в економіці зручно користуватися методами (К-Ра).

У найпростішому випадку кореляційного аналізу досліджується зв'язок між двома показниками, з яких один розглядається як залежний (y), а другий незалежний (x). Сама

залежність встановлюється в результаті якісного аналізу статистичних даних, одержуваних в результаті спостереження показників x і y . До математичного визначення залежності передбачається, що зв'язок існує і формально записується у вигляді терма $y=f(x)$.

Першою задачею кореляційного аналізу є установка аналітичного виду цієї залежності, яка найкращим чином визначає дійсну залежність. У практичному вживанні частіше за все досліджується залежність, що має або лінійний

$$y = a_1 x + a_0,$$

або статечний

$$y = a_0 x^{a_1}$$

вид залежності. Стандартний математичний апарат визначення аналітичного виду функції розроблений для лінійного виду залежності. Проте це не зменшує спільності, оскільки шляхом перетворень алгебри будь-який інший вид залежності можна привести до лінійного.

Практично досліджуваний показник y складається звичайно під впливом багатьох різних чинників, кожний з яких окремо може не надавати вирішальної дії, але сумісний вплив декількох чинників є вже достатньо сильним і з їхніми змінами можна судити про зміну залежного показника. Для вимірювання такого сумісного впливу ряду чинників на аналізований показник будується модель множинної кореляції, у розглядається як функція від n змінних

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

У множинній кореляції важливим питанням є вибір виду залежності. Якісний аналіз впливу незалежних показників на залежний набуває ще більшого значення.

Знову таки, частіше за все розглядається або лінійний

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n,$$

або статечний

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n},$$

вид залежності.

Щоб встановити аналітичний вид залежності для кожного конкретного випадку, необхідно зібрати статистичні дані. Невідомими у формальних записах залежностей є коефіцієнти $a_j (j = \overline{0, n})$. Початковими даними для їхнього визначення є сукупність значень y_k і відповідні

значення $x_{j_k} (k = \overline{1, m})$. Сукупність $\{y_k, x_{j_k}\}$ складає вибірку. Об'єм вибірки m залежить від кількості незалежних чинників і тим самим від кількості шуканих величин a_j . Існує математичний апарат, за допомогою якого можна визначити цей об'єм, але практично

вважається достатнім такий об'єм вибірки m , який 3-4 рази перетворює число незалежних чинників.

Приклад

Хай ставиться питання про визначення аналітичного виду залежності залежного чинника y від трьох незалежних чинників x_1, x_2, x_3 . Для визначення вибірки необхідно зібрати статистичні дані, тобто значення y_k і x_{1k}, x_{2k}, x_{3k} , якщо $k=1, 10$.

Вибірка представлятиметься так

y_1	x_{11}	x_{21}	x_{31}
y_2	x_{12}	x_{22}	x_{32}
.....			
y_{10}	x_{110}	x_{210}	x_{310}

Для визначення тісноти зв'язку між чинниками використовується коефіцієнт кореляції. Він є емпіричною мірою лінійної залежності між чинниками. Коефіцієнти кореляції бувають: парної кореляції (r_{yx}), що показує тісноту зв'язку між двома чинниками y і x ; множинної кореляції $R_{yx_1x_2\dots x_n}$, що показує тісноту зв'язку групи чинників; часткової кореляції $R_{yx_1x_2\dots x_{n-1}}$, що показує, як зміниться тіснота зв'язку, якщо з групи чинників виключити один.

Коефіцієнт кореляції – величина r , де $r \in [-1, 1]$. Причому чим ближче значення r до одиниці, тим зв'язок тісніше. Для парної кореляції, якщо r близько до (-1) , то зв'язок зворотний (із збільшенням одного чинника другий зменшується), а якщо r близький до $(+1)$ – зв'язок прямий. Якщо r близький до нуля, то зв'язку не існує, і ніяка лінійна залежність, одержана лінією регресії, не показує істинної картини.

Наступним питанням є вивчення точності оцінки одержаного залежного чинника за допомогою знайденої лінії регресії. До розгляду беруться квадрати відхилень фактичних значень від розрахункових. Одержана сума квадратів зв'язується з певним числом, що усереднює цю суму. В літературі це число називають ступенями свободи. Це різниця між об'ємом вибірки і числом незалежних чинників.

Для оцінки точності лінії регресії використовується коефіцієнт Фішера F , який розуміється в двох аспектах: табличний або теоретичний і розрахунковий, обчислений на основі одержаної лінії регресії. Кількісне значення коефіцієнта F залежить від рівня ступенів свободи і рівня достовірності. Набуте розрахункове значення критерію Фішера порівнюється з табличним значенням за відповідних умов. Якщо розрахункове значення F більше або хоча б не менше табличного, то залежність – лінія регресії достовірна. Практично береться 95 %-й рівень достовірності.

Незалежні показники мають неоднакову значущість при визначенні залежного показника. Для оцінки значущості кожного незалежного показника використовують критерій Ст'юдента S або t відношення. Цей критерій розглядається так само в двох аспектах за тих же умов, але обчислюється для кожного незалежного показника окремо. Якщо для якогось показника розрахункове значення S менше табличного, то даний показник є незначущим. Висувається гіпотеза про його виключення. Гіпотеза перевіряється за допомогою коефіцієнта часткової кореляції.

Приклад

Дослідження зв'язку між двома показниками. Хай організовується будівництво цеху деякого підприємства. На його будівництво і устаткування вкладаються певні засоби. Величина капіталовкладень залежить від потужності цеху. Порахована величина капіталовкладень при відповідній потужності. Статистичні дані наведені в табл. №1.

Таблиця 1

Вибірка

№ п.п	Потужність цеху, т.грн/сміну	Капіталовкладення, млн. грн
1	10	1,75
2	20	2,59
3	30	3,67
4	40	4,35

Припустимо, що залежність капіталовкладень від потужності цеху має лінійний вигляд. Позначимо через x потужність цеху, а через y капіталовкладення. Формально залежність запишеться:

$$y = a_1 x + a_0$$

Аналітичний вид залежності буде встановлений, якщо визначені коефіцієнти a_1 і a_0 . Нормальні рівняння для показників мають вигляд

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^m y_k = m a_0 + a_1 \sum_{k=1}^m x_k \\ \sum_{k=1}^m x_k y_k = a_0 \sum_{k=1}^m x_k + a_1 \sum_{k=1}^m x_k^2 \end{cases}$$

Об'єм вибірки $m=4$. Обчислимо значення складових системи.

$$\sum_{k=1}^4 y_k = 12,36; \quad \sum_{k=1}^4 x_k = 100; \quad \sum_{k=1}^4 x_k y_k = 353,4; \quad \sum_{k=1}^4 x_k^2 = 3000$$

Тоді маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 12,36 = 4a_0 + 100a_1 \\ 353,40 = 100a_0 + 3000a_1. \end{cases}$$

Розв'язання даної системи таке:

$$a_0 = 0,89; \quad a_1 = 0,088$$

Таким чином, аналітичний вираз залежності капіталовкладень від потужності цеху має вигляд

$$y = 0,088x + 0,89$$

Порахований коефіцієнт Фішера $F=113,9$. Табличне значення $F=98,5$ відповідно умовам: незалежних чинників 1, ступенів свободи $4-1-1=2$, рівень достовірності 95 %. Одержана величина перевершує табличне значення при 99 %-му рівні достовірності.

Оскільки одержана залежність вірна, її можна використовувати для прогнозування величини капіталовкладень, якщо потужність цеху зміниться. Хай потужність складає 50 т.грн в зміну. Тоді капіталовкладення визначимо згідно з одержаною моделлю

$$y = 0,088 * 50 + 0,89 = 5,29$$

вони складуть 5,29 млн грн.

Запитання для самоперевірки.

1. Основна мета використання (К-Ра).
2. Що значить побудувати лінію регресії?
3. Як перевірити існує чи ні функціональна залежність виду $y=f(x)$ між чинниками y і x ?
4. Чому необхідна перевірка на достовірність одержаної лінії регресії?
5. Хай одержаний аналітичний вид залежності типу. Як перевірити, які з 4 незалежних чинників мало впливають на залежний чинник?

Лекція 3 - 4. Алгоритм побудови математичної моделі залежності економічних показників

Визначення представницької вибірки. Визначення залежного показника. Побудова математичної моделі. Вибір значущих незалежних показників.

Сукупність всіх можливих значень даних чинників складає генеральну сукупність. Частина генеральної сукупності називається вибіркою. Практично завжди обробляється вибірка. Оскільки вибірка представляє генеральну сукупність, то вона повинна відображати тенденцію

зміни значень всіх даних чинників. Говорять, вибірка повинна бути представницькою. Представництво вибірки характеризується двома моментами: об'ємом вибірки і характером змін значень кожного з даних чинників. З математичних позицій вибірка може розглядатися як часовий або просторовий ряд статистичних даних. Якщо статистичні дані, тобто значення даних чинників, зібрані на одному об'єкті в певні моменти часу, то вибірку можна прийняти за часовий ряд. Якщо статистичні дані зібрані на різних об'єктах, то вибірка буде просторовим рядом статистичних даних.

Об'єм вибірки залежить від кількості незалежних чинників. Може трапитися так, що кількість значень даних чинників менше необхідного об'єму вибірки, тобто вибірка не представлена через брак статистичних даних. Якщо доповнити вибірку неможливо, ставити питання про виключення з розгляду одного або більш незалежних чинників. Виключення чинників необхідно підтвердити. Для цього використовуються коефіцієнти кореляції. Визначається значення коефіцієнтів парної кореляції між залежним і кожним незалежним з чинників. Якщо значення коефіцієнта мінімальне, висувається гіпотеза про можливість виключити з розгляду відповідний незалежний чинник як мало впливаючий на значення залежного чинника. Гіпотеза перевіряється за допомогою коефіцієнта приватної кореляції.

Приклад

Хай розглядається залежність $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Об'єм вибірки значень дорівнює 9. Вибірка непередставницька через малий об'єм. Значення коефіцієнтів парної кореляції таке:

$$\begin{aligned} r_{yx_1} &= 0,6; & r_{yx_3} &= 0,2; \\ r_{yx_2} &= 0,7; & r_{yx_4} &= 0,53. \end{aligned}$$

Чинник x_3 мало впливає на значення y . Вважається, що можна його виключити з розгляду. Перевірка даної гіпотези здійснюється шляхом порівняння значень коефіцієнтів множинної кореляції R_{yx_1, x_2, x_3, x_4} і R_{yx_1, x_2, x_4} . Хай значення такі $R_{yx_1, x_2, x_3, x_4} = 0,5$, $R_{yx_1, x_2, x_4} = 0,47$. Вони мало відрізняються один від одного. Нова сукупність має таку ж тісноту зв'язку, як і початкова. Чинник x_3 можна виключити. Слід розглядати залежність $y = f(x_1, x_2, x_4)$. Для трьох незалежних чинників вибірка достатня за об'ємом.

Вибірка може виявитися непередставницькою через характер значень кожного окремо узятго чинника. Серед значень якогось чинника знаходиться патологічне значення, сильно відмінне від інших. У такому разі або виключається весь відповідний рядок вибірки, або потрібно з'ясувати причини, які зумовили появу такого значення. Якщо вибірка просторовий ряд

і об'єм достатній, то з розгляду можна виключити об'єкт і, природно, всі значення чинників, які характеризують цей об'єм. Якщо вибірка часовий ряд, то таке виключення небажане, оскільки тимчасові інтервали виходять різні і точність прогнозування не буде великою.

Приклад

Хай розглядається залежність $y = f(x_1, x_2)$. Гіпотетична вибірка значень чинників y , x_1 , x_2 така:

№ п.п	y	x_1	x_2
1	95	17	61
2	103	20	69
3	98	19	71
4	101	98	64
5	99	23	65
6	106	18	70
7	103	15	72

Четверте значення чинника x_1 патологічне. Вибірка непередставницька. Якщо це просторовий ряд, то рядок 4 виключається з розгляду, об'єм вибірки дозволяє це зробити. Якщо це часовий ряд, необхідно з'ясувати причини появи значення $x_1^4 = 98$. Замість цього значення можна поставити середнє значення всіх значень чинника x_1 . У даному випадку $x_1^4 = 19$ і замість 98 підставити 19.

У реальних умовах з'являється проблема вибору залежного чинника з безлічі передбачуваних залежних чинників, коли задана сукупність незалежних чинників. Вибір можна здійснити інтуїтивно, але можна це зробити обґрунтовано. Процедура вибору така. Обчислюються коефіцієнти парної кореляції між будь-якою парою передбачуваних залежних чинників. Якщо всі коефіцієнти парної кореляції близькі до одиниці, чинники вважаються колінеарними. Можна вибрати будь-який з них як залежний. Якщо колінеарність не спостерігається, то необхідно шукати інші шляхи вибору залежного чинника. При колінеарності чинників необхідно перевірити їхню поведінку по відношенню до сукупності незалежних чинників. Обчислюються коефіцієнти парної кореляції кожного залежного чинника з кожним незалежним. Якщо відповідні коефіцієнти близькі за величиною і обов'язково мають однаковий знак, то передбачувані залежні показники однаково поведуться по відношенню до незалежних. Остаточне рішення про вибір незалежного чинника приймаються на основі значень коефіцієнтів множинної кореляції. Для якої сукупності (один залежний і всі незалежні) коефіцієнт множинної кореляції найбільший, то сукупність і слід розглядати.

Приклад

Хай розглядаються чинники y_1 і y_2 як полагає залежні і x_1, x_2, x_3 як незалежні. На основі вибірки обчислені коефіцієнти парної кореляції. Значення такі: $r_{y_1 y_2} = 0,998$. Чинники y_1 і y_2 колінеарні.

$$\begin{aligned} r_{y_1 x_1} &= 0,42 & r_{y_2 x_1} &= 0,50; \\ r_{y_1 x_2} &= -0,34; & r_{y_2 x_2} &= -0,28; \\ r_{y_1 x_3} &= 0,75; & r_{y_2 x_3} &= 0,63. \end{aligned}$$

Відповідні значення коефіцієнтів парної кореляції близькі за значенням і мають однакові знаки. Можна розглядати будь-який з чинників. Коефіцієнти множинної кореляції сукупності чинників такі. $R_{y_1, x_1, x_2, x_3} = 0,64$; $R_{y_2, x_1, x_2, x_3} = 0,51$. Як залежний чинник вибирається

y_1 , і розглядається залежність $y_1 = f(x_1, x_2, x_3)$. Аналітичний вид залежності визначається, використовуючи метод найменших квадратів [1] і будь-який пакет прикладних програм або вручну. Спочатку вважається вид залежності, далі визначаються складові цією залежності.

Наприклад, необхідно визначити аналітичний вид залежності $y = f(x_1, x_2)$. Вважаємо, що залежність існує. Це можна перевірити за допомогою коефіцієнта множинної кореляції. Є представницька вибірка значень y, x_1 і x_2 . Якщо припустити, що залежність має лінійний вигляд,

то загальний вигляд лінійної залежності буде таким $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$. В аналітичному виді залежності замість a_0, a_1 , і a_2 повинна стояти конкретні числові значення. Їх можна визначити на основі вибірки, використовуючи метод найменших квадратів, реалізований в будь-якому пакеті прикладних програм за математичною статистикою. Якщо припустити, що

залежність має статечний вигляд, тобто $y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ таким же чином необхідно визначити значення a_0, a_1 , і a_2 . Одержаний аналітичний вид залежності піддається перевірці на достовірність. Це необхідно зробити з двох причин. По-перше, вибірка, на основі якої одержана залежність, є тільки вибіркою, а не генеральною сукупністю статистичних даних. По-друге, вид залежності припускається спочатку. Можна помилитися. Перевірка на достовірність здійснюється за допомогою коефіцієнта Фішера. У випадку, якщо розрахункове значення коефіцієнта Фішера менше табличного, лінію регресії не можна використовувати як

математичну модель залежності даної сукупності чинників. Слід шукати причини невірності, їх виключити і повторити процедуру визначення аналітичного виду залежності.

У разі вірогідності лінії регресії можна ставити питання про спрощення самої моделі залежності. Кореляційно-регресійний аналіз таку можливість надає. Обчислюються значення коефіцієнтів Ст'юдента на основі одержаної лінії регресії. Якщо для якогось незалежного чинника коефіцієнт Ст'юдента менше табличного, висувається і перевіряється гіпотеза про його виключення. Якщо гіпотеза підтвердилася, коефіцієнт частної кореляції показав маленьке значення залишкового значення коефіцієнта множинної кореляції, то чинник виключається з розгляду, з вибірки викидається відповідний стовпець значень і наново починається процедура визначення аналітичного виду залежності залежного показника від меншої кількості незалежних чинників.

Приклад

Визначений аналітичний вид залежності і перевірена на достовірність лінія регресії, залежність чинника, що описує, від трьох незалежних чинників

$$y = 16 + 23x_1 - 7x_2 + 14x_3$$

Пораховані коефіцієнти Ст'юдента : $S_1=4,25$; $S_2=6,14$; $S_3=0,91$. Табличні значення за відповідних умов $S_{\text{табл.}}=3,67$. Згідно з такою інформацією, чинник x_3 є малозначущим для визначення значення залежного чинника y . Вважаємо, його можна виключити. Коефіцієнти

множинної кореляції $R_{yx_1, x_2, x_3} = 0,74$ і $R_{yx_1, x_2} = 0,70$ підтверджують гіпотезу про

виключення x_3 з розгляду. Можна задовольнятися залежністю $y = f(x_1, x_2)$. Знову припускаємо вид залежності (він може бути і іншим, ніж спочатку), визначаємо складові цього виду і перевіряємо на достовірність нову залежність.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке вибірка і чому вона повинна бути представницькою?
2. Яким чином визначається представництво вибірки?
3. Які засоби кореляційного аналізу дозволяють висунути гіпотезу про виключення чинника з розгляду і як перевірити цю гіпотезу?
4. Яким чином і на основі чого визначається лінія регресії?
5. Коли лінію регресії можна вважати математичною моделлю, що представляє функціональну залежність одного чинника від інших?

6. Поясніть, чому не можна просто викреслити з одержаної лінії регресії чинник з його коефіцієнтом, якщо було ухвалено рішення про його виключення з розгляду.
7. Як, на вашу думку, можна використовувати лінію регресії як засіб прогнозування значень чинників?

Лекція 5 - 6. Виробничі функції

Поняття виробничих функцій. Похідні показники. Функція Кобба-Дугласа. Дослідження діяльності підприємства.

Основним додатком кореляційно-регресійного аналізу є виробничі функції. Виробничі функції бувають одновимірні і багатовимірні тобто $y=f(x)$ і $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де y - кінцевий результат; $x, x_1, x_2, \dots, x_n$ – показники, що безпосередньо впливають на кінцевий результат.

Аналітичний вид виробничих функцій визначається методами К-Ра на основі фактичних значень всіх даних показників, зібраних на конкретному підприємстві за певний період часу. Інтервали часу між моментами, коли фіксувалися значення показників, залежать від того, як буде організовано прогнозування даного кінцевого результату або інших незалежних показників. Якщо прогнозування здійснюватиметься на рік або два вперед, то інтервали часу – рік або півроку, якщо прогнозування щомісячне, то і інтервал часу не повинен бути більш ніж місяць.

Припустимо, що визначений аналітичний вид залежності відповідний до правил К-Ра. Можна одержати деякі похідні показники на основі наявної виробничої функції. Середня віддача як новий кінцевий результат показує, скільки незалежного показника доводиться на одиницю кінцевого результату. Формально це запишеться так:

$$Z_1 = \frac{y}{x_k} = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)}{x_k}$$

Гранична віддача розглядається математично як часткова похідна функції за окремо взятим аргументом. В економетричних дослідженнях гранична віддача показує, як прямо або обернено впливає якийсь показник на кінцевий результат.

$$Z_2 = \frac{\partial y}{\partial x_k} = f'_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)$$

Якщо Z_2 має позитивний знак, це значить, що із збільшенням показника x_k збільшиться і кінцевий результат y . Аналогічно, якщо знак Z_2 негативний, то із збільшенням значення x_k

значення у зменшуватиметься. Важливим показником є еластичність кінцевого результату по відношенню до якогось незалежного показника. Еластичність визначається таким чином:

$$E_{yx_k} = \frac{\partial y}{\partial x_k} * \frac{x_k}{y}.$$

Практично цей показник визначає як змінюється величина кінцевого результату у, якщо на один відсоток збільшимо значення показника x_k . У деяких випадках використовується коефіцієнт змінюваності k_{ij} , що визначає, яку частку показника x_j можна замінити показником x_i , щоб при цьому величина кінцевого результату не змінилася:

$$k_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = - \frac{E_{yx_j} * x_j}{E_{yx_i} * x_i}.$$

Проте це можна здійснювати, виходячи з конкретних незалежних показників. Не завжди частка одного показника може замінюватися часткою іншого показника.

Класичним прикладом виробничих функцій є функція Кобба-Дугласа. Вона була запропонована і обґрунтована американськими ученими (математиком і економістом) Коббом і Дугласом і показує залежність об'єму виробництва від матеріальних і трудових витрат. Хай y – означає об'єм виробництва, x_1 і x_2 – матеріальні і трудові витрати відповідно, тоді залежність така:

$$y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}.$$

У деяких випадках розглядається і лінійний вид функції Кобба-Дугласа, тобто $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$.

Лінійний вид функції краще апроксимує фактичні значення показників, проте статечний вигляд краще для дослідження самої виробничої функції і прогнозування значень.

Розглянемо похідні показники, використовуючи спочатку статечний вид функції Кобба-Дугласа. Середня віддача в даному випадку має конкретний економічний сенс. Середня продуктивність праці

$$Z_1^1 = \frac{y}{x_2} = \frac{a_0 x_1^{\alpha_1} * x_2^{\alpha_2}}{x_2} = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1}$$

і середня фондівіддача

$$Z_1^2 = \frac{y}{x_1} = \frac{a_0 x_1^{\alpha_1} * x_2^{\alpha_2}}{x_1} = a_0 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2}.$$

Якщо використовується лінійний вид функції Кобба-Дугласа, тоді середня продуктивність праці

$$Z_1^1 = \frac{y}{x_2} = \frac{b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2}{x_2} = b_2 + b_1 \frac{x_1}{x_2} + b_0 \frac{1}{x_2}$$

і середня фондовіддача

$$Z_1^2 = \frac{y}{x_1} = \frac{b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2}{x_1} = b_1 + b_2 \frac{x_2}{x_1} + b_0 \frac{1}{x_1}$$

Гранична продуктивність праці згідно з формами запису функції Кобба-Дугласа

$$Z_2^1 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial(a_0 x_1^{\alpha_1} * x_2^{\alpha_2})}{\partial x_2} = a_0 \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2-1},$$

або

$$Z_1^1 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = b_2$$

Гранична фондовіддача

$$Z_2^2 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial(a_0 x_1^{\alpha_1} * x_2^{\alpha_2})}{\partial x_1} = a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2},$$

або

$$Z_2^2 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = b_1$$

Звідси впливає, якщо розглядалася степенева форма запису функції Кобба-Дугласа, то похідні показники виражалися у вигляді функції, а якщо лінійна форма, то у вигляді константи. Маючи функцію, можна вести її подальше дослідження. Друга похідна функції показує прискорення, тобто на скільки зміниться величина кінцевого результату, якщо дамо певний приріст аргументу, тобто незалежного показника. В нашому випадку, якщо змінимо трудові витрати або матеріальні - як зміниться продуктивність праці або фондовіддача.

Розглянемо еластичність об'єму випуску продукції як по відношенню до матеріальних, так і по відношенню до трудових витрат. Для випадку статичного вигляду функції:

$$E_{yx_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} * \frac{x_1}{y} = \frac{(a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2}) x_1}{a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}} = \alpha_1,$$

$$E_{yx_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2} * \frac{x_2}{y} = \frac{(a_0 \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2-1}) x_2}{a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}} = \alpha_2$$

Очевидно, що показник ступеня безпосередньо є і величиною еластичності.

Для випадку лінійного вигляду функції:

$$E_{yx_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} * \frac{x_1}{y} = b_1 \frac{x_1}{y},$$

$$E_{yx_2} = \frac{\partial y}{\partial x_2} * \frac{x_2}{y} = b_2 \frac{x_2}{y}.$$

У цьому випадку значення еластичності необхідно обчислити. Частка $\frac{x_1}{y}$ або $\frac{x_2}{y}$ обчислюються як середні значення відповідних фактичних значень даних показників, тобто $\frac{\overline{x_1}}{\overline{y}}$ або $\frac{\overline{x_2}}{\overline{y}}$,

$$\text{де } \overline{x_1} = \sum_{k=1}^m x_{1k} / m; \quad \overline{x_2} = \sum_{k=1}^m x_{2k} / m; \quad \overline{y} = \sum_{k=1}^m y_k / m$$

Доведено [2], а у принципі і очевидно, оскільки еластичності α_1 і α_2 є величинами з інтервалу (0,1), цей факт використовується при дослідженні на ефективність функціонування підприємства, для якого визначена функція Кобба-Дугласа. Розглядається сума еластичностей $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$. Вважається, що підприємство працює ефективно якщо $\gamma > 1$, нормально якщо $\gamma = 1$, і неефективно, якщо $\gamma < 1$. За значеннями еластичностей α_1 і α_2 можна визначити трудомістке або матеріаломістке виробництво. Якщо $\alpha_1 > \alpha_2$ – виробництво трудомістке, якщо $\alpha_1 < \alpha_2$ – матеріаломістке, це витікає з визначення еластичності.

Приклад

Для підприємства А були зібрані по півріччях статистичні дані про об'єм виробництва, матеріальні і трудові витрати. Об'єм вибірки склало 7 півріч. На основі вибірки методом найменших квадратів визначена і перевірена на достовірність функція Кобба-Дугласа при пропозиції, що її вид статечний. Функція така:

$$y = 17x_1^{0,62}x_2^{0,43}.$$

Функція продуктивності праці є такий вигляд:

$$Z^1 = 17x_1^{0,62}x_2^{0,34-1} = 17x_1^{0,62}x_2^{-0,57}.$$

Функція фондovіддачі запишеться так:

$$Z^2 = 17x_1^{0,62-1}x_2^{0,34} = 17x_1^{-0,38}x_2^{0,43}.$$

Еластичності об'єму випуску по матеріальних і трудових витратах - $\alpha_1=0,62$ і $\alpha_2=0,43$ відповідно. Аналіз діяльності підприємства такий. Підприємство працює ефективно: $\alpha_1+\alpha_2=0,62+0,43=1,05>1$. Виробництво трудомістке, щоб збільшити на один відсоток об'єм випуску продукції, необхідно трудові витрати збільшити на 2,3 %, а матеріальні тільки на 1,6 %.

Розглянемо продуктивність праці і фондівіддачу. Якщо на один відсоток збільшимо трудові витрати, продуктивність праці зменшиться на 0,57 %, аналогічно при збільшенні на один відсоток матеріальних витрат фондівіддача зменшиться на 0,38 %. Природно, якщо при цьому не міняється об'єм випуску продукції.

Прогноз на восьме півріччя такий. Якщо можливо збільшити матеріальні витрати на один відсоток, то рівень виробництва збільшиться на 0,62 %, а якщо збільшити трудові витрати на один відсоток, то рівень виробництва збільшиться на 0,43 %. При необхідності збільшити об'єм випуску продукції на два відсотки можна поступити так: або збільшити матеріальні витрати на 3,2 %, або трудові на 4,6 %, або на два відсотки матеріальні і на півтора – трудові. Слід зробити так, як буде більш доцільно. Можливі і інші варіанти зміни матеріальних і трудових витрат.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке виробничі функції?
2. Як визначити виробничу функцію для конкретного підприємства?
3. Чим відрізняється середня віддача від граничної віддачі?
4. Коли і як визначається еластичність кінцевого результату по відношенню до якого –небудь незалежного показника?
5. Як визначити функцію Кобба-Дугласа для конкретного підприємства і для галузі?
6. Як визначити продуктивність праці і фондівіддачу виходячи з функції Кобба-Дугласа?
7. Як організовувати прогнозування рівня виробництва виходячи з функції Кобба-Дугласа?
8. Як визначити величину матеріальних і трудових витрат, якщо відомий прогнозний рівень виробництва?

Лекція 7 - 8. Комерційні функції

Основні комерційні функції. Типи функцій попиту. Дослідження чутливості попиту до ціни. Визначення категорії товару. Співвідношення товарів споживацької корзини. Визначення величини попиту на товар.

Виходячи з визначення, що «ринок – це інститут, або механізм, що зводить разом покупців і продавців окремих товарів і послуг», ставиться питання про дослідження попиту на товари та

пропозиції цих товарів. Ці дослідження можуть проводитися, використовуючи економічні прийоми, а саме, функції, що показують залежність попиту і пропозицій від таких показників, як ціна товарів і послуг, дохід населення, ціни супутніх товарів та ін. Ці функції прийнято називати комерційними функціями. Комерційні функції підрозділяються на дві групи: функції попиту і функції пропозиції. Функції попиту, у свою чергу, підрозділяються на функції попиту на товар масового або частого використання і функції попиту на товари тривалого використання. Як аргументи цих функцій беруться різні показники. Якщо для функцій попиту на товари масового використання як аргументи беруться такі, як ціна товару, дохід населення, ціна супутніх товарів, то для функцій попиту товарів тривалого використання необхідно ще врахувати рівень зносу товарів, насиченість населення цими товарами, появу товарів з новими технологічними можливостями та інші показники. Більш поширеними і дослідженими є функції попиту товарів масового використання. Залежно від того, які аргументи мають ці функції, їх можна розділити на три групи:

- попит від ціни товару $y=f(x)$;
- попит від доходу населення $y=f(M)$;
- попит від ціни товару, доходу населення і цін інших товарів, що становлять

$$\text{споживацьку корзину } y_a = f(x_a, x_b \dots x_k, M)$$

де y , y_a – величина попиту на якийсь товар; x , x_i – ціна відповідного товару; M – дохід населення.

Аналітичний вид цих функцій визначається методами (К-Ра) на основі статистичних даних, зібраних в ринку попиту на дані товари.

Перший тип функцій $y=f(x)$ використовується підприємцем–виробником товару з метою дослідження чутливості попиту на товар по відношенню до його ціни. Використовуючи еластичність попиту до ціни, можна визначити цю чутливість. Якщо при збільшенні ціни величина попиту мало зміниться, підприємцю може виявитися вигідним збільшення ціни товару.

Приклад

Визначена залежність попиту на товар, а по відношенню до його ціни

$$y=17x^{-0,01}.$$

Очевидно, що попит зменшиться, якщо ціна товару збільшиться, це завжди так. За даною залежністю можна зробити твердження, якщо ціна товару збільшиться на 1 %, то попит на цей товар зменшиться на 0,01 %. Підприємець може визначити, вигідна йому така зміна чи ні, тобто

сума грошей, яку він одержить за рахунок збільшення ціни на товар, покриє втрату із зменшенням попиту на 0,01 % чи ні.

Другий тип функції $y=f(M)$ використовується для визначення тенденції попиту на товар, якщо доход населення збільшиться. Відомо, що якщо доход збільшується, збільшується купувальна здатність і тим самим збільшується попит на товар. Проте при значному збільшенні доходу покупці можуть замість одного товару купувати інший, більш якісний і дорогий. Тоді попит на даний товар зменшиться. Говорять, товар перейшов з вищої категорії в нижчу. Підприємець повинен ухвалити певне рішення по виробництву даного товару.

У практичній діяльності визначається інтервал значень величини доходу населення, в межах якого один або інший товар є товаром вищої категорії в значенні його попиту. Хай в результаті нагляду попиту на товар а визначено, що якщо доход якогось економічного суб'єкта (споживача) перевищує величину α_a , то він починає купувати цей товар. Значить, товар став для нього товаром вищої категорії. Проте, якщо доход цього ж суб'єкта став більше деякого β_a , то він перейшов на інший товар, який, в деякому розумінні, замінив даний товар а. Значить, якщо $M \in [\alpha_a, \beta_a]$, то товар а вищої категорії, а якщо $M \notin [\alpha_a, \beta_a]$, товар не користується попитом серед покупців, доход яких або перевищує значення β_a , або менше значення α_a . Якщо таких економічних суб'єктів більшість, то підприємець повинен подумати, чи варто йому випускати цей товар або перейти на виробництво іншого товару, який на даний момент вважається товаром вищої категорії.

Третій тип функції, так звана «індивідуальна функція попиту», є більш гнучкою математичною моделлю для дослідження попиту на даний товар. Сама назва «індивідуальна функція попиту» зв'язана з тим, що для конкретного економічного суб'єкта буде певний рівень доходу, що у свою чергу зумовить структуру споживацької корзини, тобто набір товарів, яких придбаває даний споживач. Оскільки як аргументи індивідуальної функції попиту є якийсь перелік цін різних товарів, то, виходячи з неї, можна визначити, в якому співвідношенні знаходяться товари, тобто є взаємозамінними, взаємодоповнюваними або незалежними. Співвідношення товарів передбачає, як поведе себе попит на конкретний товар, якщо ціна іншого товару змінюватиметься. Якщо товари взаємозамінні, то при зростанні попиту на один товар попит на інший товар зменшуватиметься. Якщо товари взаємодоповнювані, то при зростанні попиту на один товар попит на інший товар теж збільшуватиметься.

У разі незалежних товарів зміна попиту на один товар ніяк не впливатиме на зміну попиту на інший товар. Такі думки може взяти до уваги підприємець, що виробляє товар, включений в споживацьку корзину. Для визначення кількісного значення попиту на конкретний товар також використовується індивідуальна функція попиту.

Основним похідним показником при дослідженні таких математичних моделей є еластичність. У даному випадку є три типи еластичностей: еластичність попиту на товар а, якщо ціна цього товару а збільшиться; еластичність попиту на товар а, якщо збільшиться ціна товару b, що входить в споживацьку корзину; еластичність попиту на товар а, якщо доход населення М збільшиться. Формально це запишеться так:

$$E_{y_a a} = \frac{\partial y_a}{\partial x_a} * \frac{x_a}{y_a} \quad (1)$$

$$E_{y_a b} = \frac{\partial y_a}{\partial x_b} * \frac{x_b}{y_a} \quad (2)$$

$$E_{y_a M} = \frac{\partial y_a}{\partial M} * \frac{M}{y_a} \quad (3)$$

Еластичність типу (1) нагадує еластичність, що використовується при дослідженні чутливості попиту від ціни. Проте фізично це різні величини, оскільки досліджуються різні функції – багатовимірна і одновимірна відповідно. При одновимірній функції ніякі інші показники не враховуються – це зовнішнє середовище, а в багатовимірній функції багато інших показників є змінними, розглядаються при дослідженні.

Еластичність типу (2) зумовлює співвідношення товарів залежно від відношення $E_{y_a x_b}$ до нуля. Отже, якщо

$E_{y_a x_b} > 0$, товари а і b взаємодоповнювані;

$E_{y_a x_b} = 0$, товари а і b незалежні;

$E_{y_a x_b} < 0$, товари а і b взаємозамінні.

Прогнозна кількість товару на наступний плановий період визначається таким чином: споживачі даного товару поділяться на соціальні групи виходячи з величини доходу. Хай таких соціальних груп є m ($i = \overline{1, m}$). Кількість споживачів в кожній групі складає n_i економічних суб'єктів. Для представників кожної соціальної групи визначається індивідуальна функція попиту. При відомих цінах товарів споживацької корзини і величині доходу можна визначити величину попиту на даний товар для представника даної соціальної групи. Хай y_i означає цю

величину попиту в і-й соціальній групі, тоді $y = \sum_{i=1}^m y_i n_i$ і складає приблизну величину попиту на даний товар. Проте при ухваленні рішень про кількість товару, що випускається, необхідно врахувати зміну величини доходу відповідної соціальної групи споживачів, це може привести до збільшення або зменшення попиту, а так само чи змінюється попит на взаємозамінний товар.

Приклад

Згідно з інформацією в різних літературних джерелах населення країни можна поділити на такі соціальні групи (табл. 2)

Таблиця 2

Розподіл населення на соціальні групи по рівню доходів

Рівень доходів в місяць грн	За достатком і належністю до соціальної групи, %	Рівень достатку
до 150	низький – 7	Бідняк
150-205	вище низького – 9	
206-500	робітник – 38	середній достаток
501-1000	середній – 32	
1001-2000	вище середнього – 12	достаток вище середнього
2001-5000	вищий – 2	вищий достаток
5001- і більш	еліта – 1	

70 % всього населення складають люди з середнім достатком. При прогнозуванні попиту на певний часто споживаний товар слід посилатися на зміст споживацької корзини і попит на цей товар. Припустимо, прогнозується величина попиту на товар а. На підставі результатів нагляду на ринку збуту методами кореляційно-регресійного аналізу визначені індивідуальні функції попиту.

Для групи населення «робітник» -
$$y_a = x_a^{-0,3} x_b^{0,2} x_c^{-0,4} M^{0,5};$$

для групи населення «середній»
$$y_a = x_a^{-0,4} x_d^{0,1} x_c^{-0,3} M^{0,6}.$$

Аналіз попиту такий: якщо ціна товару а збільшиться на 1 %, то по групі «робочий» попит зменшиться на 0,3 %, а по групі «середній» - на 0,4%. Загалом можна вважати, що попит на товар а в середньому зменшиться на 0,7 %, якщо не зміниться ціна товарів b, c і d, а також доход. Проте, товари b і d є взаємозамінними по відношенню до товару а. Слід перевірити поведінку попиту на ці товари. Далі, якщо доход населення цих груп перевищує інтервал доходу, тоді даний товар перейде з вищої категорії по попиту на нижчу, то величина попиту на нього може змінитися значно.

Не проводячи більш ретельного аналізу, можна констатувати факт, що якщо ухвалимо рішення про збільшення ціни на товар на 1 %, то попит зменшиться на 0,7 %. При відомій кількості попиту в попередньому періоді можна порахувати кількість попиту на планований період. Далі провести економічний аналіз того, вигідно чи ні збільшення ціни на товар. Продати

меншу кількість товару за більшою ціною буде вигідніше ніж продати більшу кількість товару за меншою ціною.

Інший вид комерційних функцій – це функції пропозиції. Функції пропозиції можуть описувати пропозицію товарів залежно від їхньої ціни, пропозиції різних послуг, пропозиції робочої сили та ін.

Функція пропозиції товару залежно від ціни є в деякому розумінні зв'язаною з функцією попиту на товар залежно від ціни. Відомо, що із зростанням ціни товару попит на нього зменшується, а пропозиція збільшується. Якщо підприємцю вигідно збільшити ціну, то він повинен бути упевнений, що товар буде реалізованим. Ставиться питання, при якій ціні весь товар буде проданий. Для цього необхідно визначити так звану критичну точку. В даному випадку, визначити величину ціни, при якій величина пропозиції дорівнює і величині попиту. Якщо $y = f(x)$ визначає залежність попиту y від ціни x , а $z = g(x)$ – пропозиція z від ціни x , то маємо рівняння $f(x) = g(x)$, з якого можна визначити величину x , а при відомому x визначити величину або y , або z . Іншими словами, якщо визначимо ціну x , то $f(x)$ означатиме величину попиту, а $g(x)$ – величину пропозиції.

Приклад

У результаті нагляду зміни попиту і пропозиції на певний товар А при зміні його ціни складена таблиця статистичних даних.

Таблиця 3.

Статистичні дані про попит і пропозиції

№ п.п	Цехи (x)	Пропозиції (z)	Попит (y)
1	4,2	20,0	28,0
2	4,6	20,3	27,8
3	4,8	20,8	26,0
4	5,0	21,2	25,0
5	5,1	21,8	24,5
6	5,3	22,0	24,0
7	5,5	23,0	23,5
8	5,6	24,0	23,0
9	5,8	24,5	22,0
10	5,9	25,0	21,0

Хай залежність пропозиції товару і його попит лінійно залежить від зміни ціни. Тоді $z = g(x) = b_1x + b_0$ а . Використовуючи систему нормальних рівнянь, одержуємо

$$\begin{cases} 222,6 = 10b_0 + 51,8b_1 \\ 1161,5 = 51,8b_0 + 271,0b_1 \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему по відношенню b_0 і b_1 , одержуємо $b_1 = 3,14$; $b_0 = 6,0$. Функція пропозиції товару від ціни має вигляд

$$z = 3,14x + 6,0$$

Аналогічно визначається і функція попиту. Система рівнянь

$$\begin{cases} 244,8 = 10a_0 + 51,8a_1 \\ 1257,0 = 51,8a_0 + 271,0a_1 \end{cases}$$

Звідки $a_1 = -4,13$; $a_0 = 45,87$

Функція попиту на товар залежно від ціни

$$y = -4,13x + 45,87.$$

Ціна, при якій весь товар буде реалізований, визначається з відношення

$$3,14x + 6,0 = -4,13x + 45,87,$$

звідси $x = 5,48$.

Підприємець, що випускає товар А, знає, що коли ціна складе 5,48 грн за одиницю, то весь товар буде реалізований. Кількість цього товару складе: $z = 3,14 \cdot 5,48 + 6,0 = 23,21$ одиниць.

Запитання для самоперевірки

1. Як визначити аналітичний вид будь-якої комерційної функції?
2. Як визначити, можна чи ні підвищити ціну на товар?
3. Коли попит на товар зростає, а коли зменшується?
4. Від чого залежить список товарів споживацької корзини? І як формується індивідуальна функція попиту?
5. З якою метою розглядається співвідношення різних товарів (взаємозамінні, взаємодоповнюючі)?
6. Як ви зробите, якщо плануєте випуск певних товарів?

Лекція 9 - 10. Системи масового обслуговування

Фізичні і математичні системи масового обслуговування. Структура СМО. Коефіцієнт завантаження СМО. Основні характеристики роботи СМО з обмеженим числом станів. Основні розрахункові формули визначення характеристик СМО з необмеженим числом станів.

Фізичні системи масового обслуговування (СМО) зустрічаються у всіх галузях діяльності людини. Системами називаються тому, що є надходження так званих заявок на обслуговування і є механізм, який виконує заявки. Якщо інтенсивність надходження заявок більше, ніж їх обслуговування виникає черга. Простій в черзі може привести до втрати клієнтів, що надходять на обслуговування або привести до великих грошових витрат. Наприклад, морські транспортні засоби, які перевозять різні вантажі приходять в порт. Якщо причали зайняті іншими морськими транспортними засобами, вони залишаються на рейді, чекають в черзі, щоб надійти на завантаження або на розвантаження. Якщо ці роботи організовані не достатньо добре, то простій на рейдах тривалий, що обходиться дуже дорого. Ставиться питання, як необхідно організувати обслуговування судів, щоб простій звести до мінімуму.

Математичний апарат, який досліджує процеси утворення черг або затримки в обслуговуванні, також називається системою масового обслуговування (СМО). Практичне вживання моделей СМО здійснюються в двох аспектах, це коли необхідно дослідити функціонуючу систему і виявити причини недостатньої ефективності її роботи або на стадії створення системи, коли необхідно визначити структуру системи, яка мала певні показники своєї роботи. Методи СМО добре працює, коли дана система складається з великого числа тотожних або схожих елементів.

СМО піддається кількісному аналізу, проте на фоні реальних ситуацій виглядає вельми спрощеною. Хоча вивчаються досить прості системи, результати вивчення дозволяють одержати уявлення про якісну і приблизно кількісну поведінку реальної системи.

Фізичну СМО можна математично описати, задаючи такі компоненти:

- вхідний потік, тобто потік заявок, що надходять на обслуговування;
- дисципліну черги;
- механізм обслуговування.

Для визначення вхідного потоку вимагається задати імовірнісний закон, що управляє послідовністю моментів надходження заявок на обслуговування. Джерело надходження заявок вважається невичерпним, тобто вважається, що заявка завжди надійде.

Дисципліна черги описує поведінку заявки, що надійшла на вхід системи до безпосереднього надходження на обслуговування.

Механізм обслуговування характеризується тривалістю процедури обслуговування і кількістю заявок, обслуговуваних одночасно. Тривалість обслуговування залежить від структури механізму обслуговування і може задаватися імовірнісним законом або бути постійною величиною. Для опису механізму обслуговування вимагається вказати кількість приладів, що становлять механізм, і їхнє розташування. Прилади можуть розташовуватися паралельно або послідовно.

Характеристики, які необхідно одержати, досліджуючи СМО, залежать від реальних умов, проте часто цікавить таке:

- імовірність того, що в системі немає жодної заявки;
- середнє число заявок в черзі;
- середнє число заявок в СМО;
- середній час очікування заявок в черзі;
- коефіцієнт попиту заявок в черзі і в системі обслуговування та ін.

Способи визначення цих характеристик залежить від математичної моделі СМО. Математичну модель породжує безпосередня конкретизація вхідного потоку, дисципліни черги і механізму обслуговування, кожна з яких може мати різні уявлення залежно від того, до якої сфери робіт можна віднести СМО і як її можна формалізувати. На рис. 3,4,5 наведені характеристики всіх складових математичної моделі СМО.



Рис. 3. Характеристики вхідного потоку



Рис. 4. Характеристики дисципліни черги



Рис. 5. Характеристики механізму обслуговування

Наведемо приклад конкретної СМО, на основі якої можна побудувати математичну модель, безпосередньо описуючи кожен з трьох складових. Отже, однофазова одноканальна система масового обслуговування з неперіодичним стаціонарним вхідним потоком і обмеженим числом місць в черзі. Характеристика така: заявки надходять на обслуговування по одній. Інтервали часу, через які надходять заявки, залежить тільки від інтенсивності і не залежить від ніяких інших чинників. Вони мають випадковий характер і не повторюються. Механізм обслуговування складається з одного приладу. В черзі може знаходитися не більше наперед заданого числа заявок. Побудувати математичну модель такої системи означатиме: задати закон імовірності надходження заявок. Це буде закон Ерланга, із заданою інтенсивністю λ . Тривалість обслуговування механізму обслуговування або буде задана конкретним числом, або законом ймовірності обслуговування, причому кожного приладу. Число місць в черзі також представлятиметься конкретним числом.

Крім основних характеристик СМО, вводиться ще одне, називане станом системи. Стан системи визначається числом заявок, які одночасно знаходяться в системі. Якщо довжина черги визначена конкретним числом, то система зважає на кінцеве число станів, а якщо черга не обмежена, то з нескінченним числом станів. Від цього залежить метод визначення основних характеристик системи.

Позначимо через λ - інтенсивність надходження заявок, а через μ - інтенсивність обслуговування. Коефіцієнт завантаження механізму обслуговування ρ обчислюється по-різному: для одноканальної однофазової системи

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu},$$

для багатоканальної однофазової

$$\rho = \frac{s\lambda}{\mu};$$

$$\mu = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s}{s},$$

де

s – число каналів.

Хай m - максимальна кількість заявок в системі; k – поточна кількість вимог ($0 \leq k \leq m$).

Основні характеристики для s – канальної системи обслуговування із стаціонарним вхідним потоком і обмеженим числом заявок в черзі обчислюються за такими формулами.

Імовірність того, що в системі знаходиться k вимог P_k визначається по-різному залежно від того одноканальна ($s=1$) або багатоканальна СМО ($s>1$)

$$P_k = \begin{cases} (m-k-1)\rho P_{k1} & s=1 \\ a_k P_0 & s>1 \end{cases} \quad 1 \leq k \leq m$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{m-k+1}{k} \rho a_{k-1} & 1 < k \leq s \\ \frac{m-k+1}{s} \rho a_{k-1} & s < k \leq m \end{cases}$$

де

Імовірність того, що всі s – канали вільні, тобто простій каналів при $s=1$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^m \frac{m! \rho^k}{(m-k)!}};$$

при $s>1$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^m a_k}.$$

Математичне очікування числа вимог в черзі

$$\bar{v} = \sum_{k=s+1}^m (k-s) P_k.$$

Математичне очікування числа вимог СМО

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^m k P_k.$$

Математичне очікування простою каналів обслуговування

$$\bar{Z} = \sum_{k=0}^s (s-k) P_k.$$

Середній час очікування вимог в черзі

$$\bar{t}_{ож} = \frac{\bar{v}}{\lambda(m-\bar{k})} = \frac{\bar{v}}{\mu(s-\bar{Z})}.$$

Коефіцієнт простою вимог в черзі, %

$$\alpha_1 = \frac{\bar{v}}{m} * 100.$$

Коефіцієнт простою вимог в черзі і на обслуговування

$$\alpha_2 = \frac{\bar{k}}{m} * 100$$

Коефіцієнт простою каналів обслуговування

$$\alpha_3 = \frac{\bar{Z}}{s} * 100$$

Наведемо розрахунок основних характеристик s-канальної системи обслуговування із стаціонарним вхідним потоком і необмеженим числом заявок в черзі. Такі СМО характеризуються тим, що заявка, що застала всі канали зайнятими, стає в чергу і чекає, поки один з каналів звільниться. Як тільки канал звільняється, одна із заявок, що стоїть в черзі, надходить на обслуговування. Такі системи є найпоширенішими. Основні розрахункові формули такі.

Імовірність того, що всі s-канали вільні, тобто простій каналів

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^s}{(s-1)!(s-\rho)}}$$

Імовірність того, що всі канали повністю зайняті (k=s)

$$P_s = \frac{\rho^s}{s!} P_0$$

Імовірність того, що є черга (k>s)

$$P = \frac{\rho^s}{(s-1)!(s-\rho)} P_0$$

Середній час очікування заявки в черзі до початку обслуговування

$$\bar{t}_{ож} = P \frac{\bar{t}_{обс}}{s - \rho},$$

де $\bar{t}_{обс}$ визначається виходячи з інтенсивності каналів.

Середня довжина черги

$$\bar{v} = P \frac{\rho}{s(1 - \frac{\rho}{s})^2}$$

Середнє число заявок, що знаходиться в системі

$$\bar{k} = \bar{v} + \frac{s * P_s}{1 - \frac{\rho}{s}} + P_0 \sum_{k=1}^{S-1} \frac{\rho^k}{(k-1)!}$$

Середній час перебування в системі

$$\bar{t} = \bar{t}_{ож} + t_{обс}$$

Приклад 1

У цеху підприємства функціонують 6 однотипних верстатів, які обслуговує один механік. Верстати виходять з ладу. В обов'язок механіка входить усунення несправностей. Несправності у верстатах носять випадковий характер і виникають з певною інтенсивністю. Ніякі зовнішні дії не враховуються. В середньому, протягом одного часу з ладу виходить одна машина. Тривалість огляду складає в середньому 6 хв. Визначити завантаженість механіка і процес обслуговування верстатів.

Математична модель такої системи така: механік інтерпретується як механізм обслуговування, верстати з несправностями складають потік заявок. Інтенсивність надходження заявок $\lambda=1$; система одноканальна ($s=1$) із стаціонарним вхідним потоком. Інтенсивність обслуговування $\mu=10$. Число заявок в СМО обмежене (в черзі не може бути більше п'ять заявок).

Необхідно визначити:

- коефіцієнт простою механіка α_1 ;
- коефіцієнт простою верстатів в черзі α_2 ;
- коефіцієнт перебування верстатів в СМО α_3 ;
- середній час очікування обслуговування $\bar{t}_{ож}$.

Початкові дані такі

$$\lambda = 1; \quad \mu = 10; \quad m = 6; \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 6)$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{10} = 0,1$$

Ймовірність знаходження СМО в певному стані

$$P_0 = \frac{1}{1 + 6! \left(\frac{0,1^1}{5!} + \frac{0,1^2}{4!} + \frac{0,1^3}{3!} + \frac{0,1^4}{2!} + \frac{0,1^5}{1!} + \frac{0,1^6}{0!} \right)} = \frac{1}{2,0632} = 0,4840$$

$$P_1 = (6-1+1) * 0,1 * 0,4840 = 0,2900$$

$$P_2 = 0,1450;$$

$$P_3 = 0,0580;$$

$$P_4=0,0170;$$

$$P_5=0,0037;$$

$$P_6=0,0003;$$

Оскільки система обов'язково знаходиться в одному з станів, то $\sum_{k=0}^6 P_k = 1$. Можна перевірити правильність рахунку.

Середня довжина черги:

$$\bar{v} = (2-1) * 0,1450 + (3-1) * 0,0580 + (4-1) * 0,0170 + (5-1) * 0,0037 + (6-1) * 0,0003 = 0,3260$$

; Середнє число вимог в системі:

$$\bar{k} = 1 * 0,2900 + 2 * 0,1450 + 3 * 0,0580 + 4 * 0,0170 + 5 * 0,0037 + 6 * 0,0003 = 0,8450$$

Середній час очікування механіка для усунення несправності

$$\bar{t}_{ож} = \frac{0,3260}{1(6-0,8450)} = 0,06 \approx 3,6 \text{ хв.}$$

Коефіцієнт простою верстата в черзі

$$\alpha_1 = \frac{0,3260}{6} 100 = 0,054 * 100 = 5,4 \%$$

Коефіцієнт простою верстата з урахуванням часу усунення несправності

$$\alpha_2 = \frac{0,8450}{6} 100 = 0,14 * 100 = 14 \%$$

Коефіцієнт простою механіка

$$\alpha_3 = \bar{Z} * 100 = 0,4840 * 100 = 48 \%$$

Втрати робочого часу механіка дуже значні і складають майже половину часу (48 %). Значить, механік може обслуговувати значно більше верстатів, ніж шість. Проте це може привести до значного збільшення коефіцієнтів α_2 і α_3 . Знаючи втрати, пов'язані з втратами верстатів і очікуванням механіка, можна провести розрахунок і визначити найвигідніший варіант за числом закріплюваних за механіком верстатів.

Приклад 2

Комбінат побутового обслуговування приймає замовлення на ремонт і перелицьовування верхнього одягу. В середньому в протягом місяця надходить 10 заявок від замовників.

Замовлення виконують 5 майстрів, кожний з яких затрачує в середньому на виконання одного замовлення 12 днів. Визначити завантаженість майстрів і процес виконання замовлень.

Математична модель такої системи така. Система багатоканальна ($s=5$), інтенсивність надходження заявок $\lambda=10$, інтенсивність одного каналу обслуговування $\mu_1 = \frac{30}{12} = 2,5$. Оскільки всі майстри працюють з однаковою інтенсивністю, то загальна інтенсивність всієї бригади майстрів $\mu=2,5$. Довжина черги не обмежена – заявок може бути скільки завгодно.

Треба визначити:

- імовірність того, що всі майстри вільні P_0 ;
- імовірність того, що всі майстри зайняті і є черга P ;
- середній час очікування заявки в черзі в обслуговуванні ;
- середню довжину черги на обслуговування ;
- середнє число заявок у системі обслуговування ;
- середній час перебування заявки в системі.

$$\rho = \frac{10}{2,5} = 4$$

Коефіцієнт завантаження системи

$$P_0 = \frac{1}{1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{(5-1)!(5-4)}} = 0,013$$

Імовірність того, що всі майстри зайняті

$$P = \frac{4^5}{(5-1)!(5-4)} * 0,013 = 0,554$$

Середній час знаходження заявки в черзі на обслуговування

$$\bar{t}_{ож} = 0,554 * \frac{12}{5-4} \approx 7 \text{ днів.}$$

Середня довжина черги

$$\bar{v} = \frac{4}{5 - (1 - \frac{4}{5})^2} * 0,554 = 11,1 \approx 11 \text{ замовників.}$$

Для визначення середнього числа заявок необхідно визначити імовірність того, що в системі знаходиться рівно 5 заявок

$$P_s = \frac{4^5}{5!} * 0,013 = 0,110$$

Середнє число заявок в системі обслуговування

$$\bar{k} = 11,1 + \frac{5 * 0,11}{(1 - \frac{4}{5})} + 0,013(\frac{4^1}{0!} + \frac{4^2}{1!} + \frac{4^3}{2!} + \frac{4^4}{3!}) \approx 16$$

замовників.

Комбінат працює не погано. Хоча середня довжина черги не маленька – 11 замовників, проте виконане замовлення можна одержати досить швидко – через 19 днів після подачі замовлення. Цей час можна дещо зменшити, якщо працюватимуть 6 майстрів.

Запитання для самоперевірки

1. Що означає описати фізичну і математичну СМО?
2. Чим характеризується вхідний потік СМО?
3. Чим характеризується дисципліна черги СМО?
4. Що означає задати математично механізм обслуговування?
5. Для чого використовується така характеристика як стан СМО?
6. Які показники характеризуються СМО?
7. Що зумовлює імовірність знаходження СМО в певному стані?
8. Як визначити середній час обслуговування механізму обслуговування, що має різну структуру?
9. Чому для багатоканальної і одноканальної СМО використовуються різні розрахункові формули ?
10. Чому для СМО з кінцевим числом полягань і невизначеним числом полягань використовуються різні розрахункові формули?

Лекція 11. Імітаційне моделювання

Ідея імітаційного моделювання. Структура імітаційної моделі. Генерація подій. Логічне дослідження об'єкта.

Імітаційне моделювання (ІМ) як математичний апарат використовується в тих випадках, коли неможливо побудувати рядкову математичну модель, яка описувала б досліджувану систему. При імітаційному підході будується експериментальна модель системи. Експериментальна модель-це логіко-математична модель, що складається з математичної частини і логічного дослідження події яка відбувається в системі під час її функціонування. Формальна схема ІМ наведена на рис. 6.





Рис. 6. Формальна схема ІМ

Спочатку дослідження полягає в зборі статистики про зміни. Зміни в системі відбуваються в певні моменти часу, при настанні подій. При побудові моделі досліджуваної системи необхідно відтворити настання подій. Настання мають випадковий характер, і можуть відбутися по закінченні певного інтервалу часу або з певною частотою. Якщо події настають по закінченні певного інтервалу часу, то інтервали розглядаються як випадкові величини, які підкоряються певному закону імовірності розподілу випадкових величин. Для того, щоб згенерувати ці величини, необхідно знати закон їхнього розподілу. Закон розподілу – це результат нагляду реальної системи, роботу якої ми імітуємо.

Щоб згенерувати події, що настають з певною частотою, необхідно мати модель імовірності. Імовірність в моделі зумовлює частоти появи результатів, відповідних появам подій в даній системі. Модель імовірності також результат нагляду роботи реальної системи. В логіко-математичній моделі необхідно визначити і представити структуру, що генерує результати, згідно з моделлю імовірності.

Приклад 1

Розглядається робота ділянки потокової лінії в механічній схемі підприємства. Ділянка складається з двох робочих місць P_1 та P_2 наповнювача заготовок між ними і місткості N . На рис. 7 представлена структура ділянки.

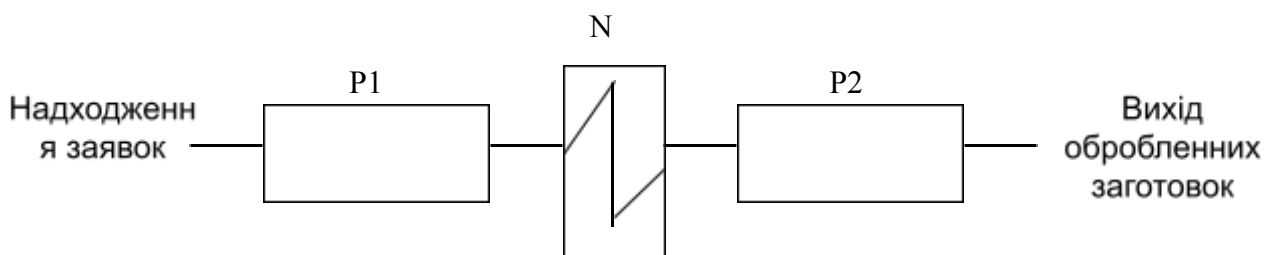


Рис. 7. Структура ділянки потокової лінії

Припустимо, що надходження заготівок на обробку і тривалість обробки на робочих місцях P_1 та P_2 мають випадковий характер і підкоряються закону розподілу випадкових величин типу Ерланга.

У такому разі інтервали часу надходження і обробки заготівок обчислюються за формулою:

$$y_i = -\frac{1}{\lambda_i} \ln \xi_k, \quad i = (0,1,2) \quad k = 1,2,\dots,$$

де ξ_k – випадкова величина, рівномірно розподілена в інтервалі $(0,1)$, λ_i інтенсивності надходження на обробку заготівок.

Н
а
д
ж
и

ч
е
р
а

P
1

Н
а
д
ж
и

P
2

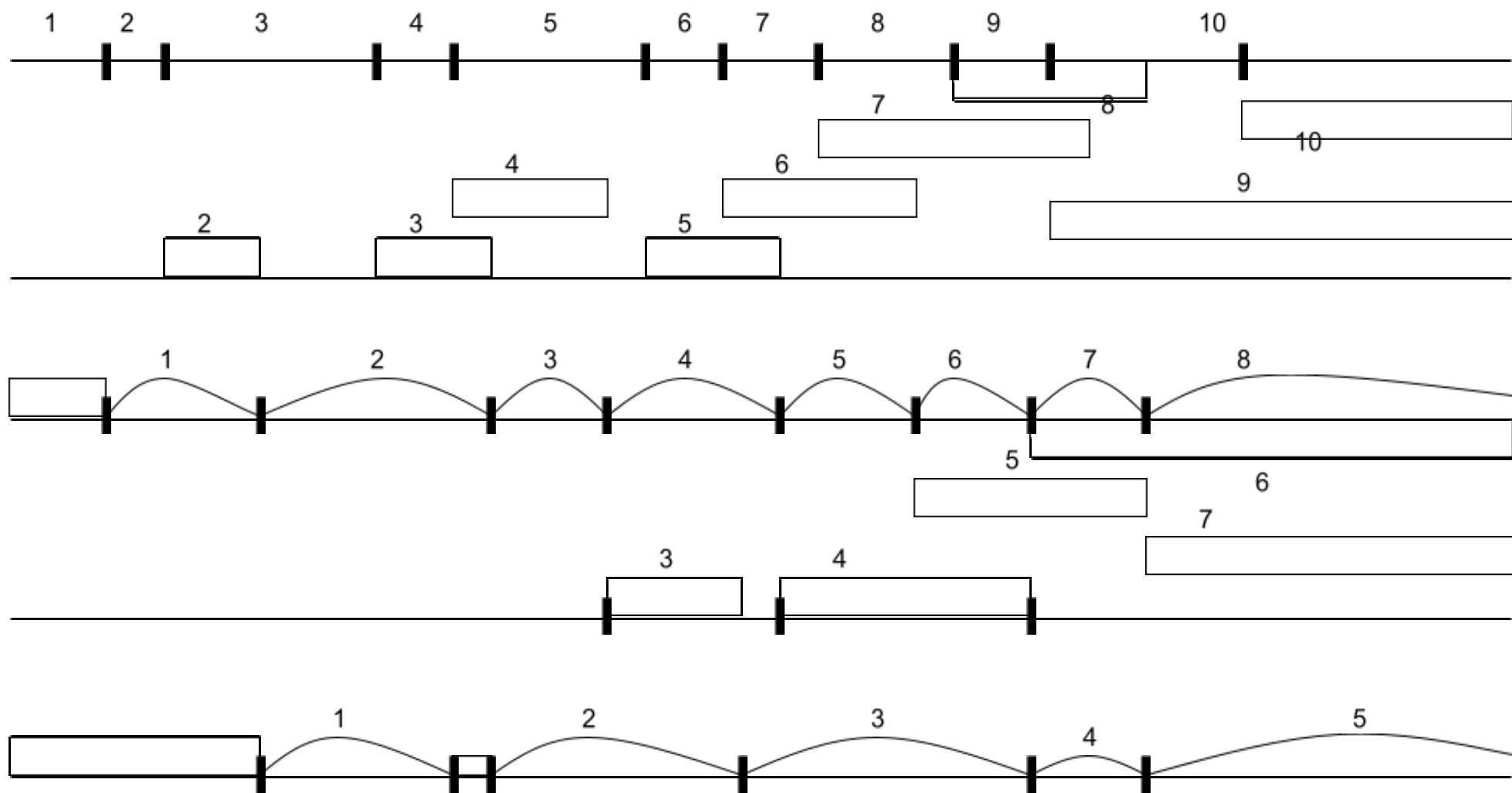


Рис. 8. Результати дослідження роботи ділянки.

На рис. 8 наведені результати експериментального дослідження роботи ділянки потокової лінії, якщо інтенсивності надходження і обробки заготовок дорівнює $\lambda_0=0,36$, $\lambda_1=0,31$, $\lambda_2=0,24$ в одиницю часу відповідно. Робота ділянки досліджувалася протягом 28 одиниць часу. За цей час надійшло на обробку 10 заготовок, оброблених вийшло 4. Решта ситуацій наведена на рис. 8.

На тимчасовій осі «надходження» відмічені на моментах надходження заготовок. На осі «черга» заштрихованими прямокутниками відмічені тривалості на простоях заготовок в черзі через зайнятість працівника P_1 . Осі P_1 і P_2 відповідають роботі і простоям працівників. Результати дослідження такі: всі заготовки, що надійшли на обробку, простояли в черзі 33 одиниці часу. Середній час перебування в черзі складає 3.3 одиниці часу. Працівник P_2 простояв за час дослідження роботи ділянки 7 одиниць часу через відсутність заготовок в накопичувачі. В накопичувачі побували 5 заготовок, загальний час складає 22.5 одиниць. Середній час перебування в накопичувачі заготовки 2.25 .

Робота ділянки досліджувалася не тривалий час. Для повної оцінки якості роботи статистика нечисленна. Проте очевидно, що черга зростає, а це значить, що працівник P_1 не зовсім справляється, слід поставити на вході два працівники. В накопичувачі також скоплюються заготовки, а це призводить до того, що P_1 простоюватиме через переповнювання накопичувача. Необхідно підсилити роботу P_2 . Можливо, необхідно поставити також два працівники. Для ухвалення рішення треба продовжити експеримент і провести економічне дослідження ефективності створення ділянки нової структури.

Приклад 2

Містер N хоче оцінити ступінь оптимальності деякої конкретної стратегії придбання і продажу акцій. Для спрощення схеми міркування передбачається, що він придбає або продає акції одного вигляду. В даний момент він володіє пакетом в 100 акцій, кожна з яких оцінюється в 10 доларів. Для простоти допускаємо також, що ціна акції може щодня змінюватися тільки на один долар. Утримувач акцій скоює не більше однієї операції в день і за кожну операцію платить комісійні у розмірі 2 % вартості реалізуючих акцій.

Містер N хоче перевірити ступінь прибутковості такої стратегії:

- володіючи пакетом акцій, необхідно продати його, як тільки ціни на акції починають падати;
- інакше слід придбавати такі акції, як тільки ціни на них на починають зростати.

У результаті наглядів складена модель імовірності зміни цін на акції (див. рис. 9.)

Видно, що тенденція зміни ціни зберігається з більшою імовірністю, ніж ця тенденція змінюється.

Ціна однієї акції в n -й день.

Ціна однієї акції в $(n-1)$ -й день	Зростає	Залишається без зміни	Падає
Зросла порівняно з $(n-2)$ -м вдень	$1/2$	$1/4$	$1/4$
Залишилася також як і в $(n-2)$ -й день	$1/4$	$1/2$	$1/4$
Впала в порівнянні з $(n-2)$ -м вдень	$1/4$	$1/4$	$1/2$

Рис. 9. Модель імовірність зміни цін на акції.

Перш ніж починати імітаційне моделювання, необхідна генерація конкретних ситуацій, результати яких відповідали розподілу імовірності наведеної моделі зміни цін на акції (рис. 9).

Один з найпростіших способів такого роду генерації полягає в киданні двох монет. Поява неоднакових «картинок» більш імовірна подія, ніж поява однакових. Відповідність між випадковими результатами при киданні монет і ситуаціями, що генеруються, можна представити за допомогою таблиці, наведеної на рис. 10.

Ціна однієї акції в n -й день.

Ціна однієї акції в $(n-1)$ -й день	Зростає	Залишається без зміни	Падає
Зросла порівняно з $(n-2)$ -м вдень	орел і решка (O, P)	два орли (2O)	дві решки (2 P)
Залишилася також як і в $(n-2)$ -й день	два орли (2 O)	орел і решка (O, P)	дві решки (2 P)
Впала порівняно з $(n-2)$ -м вдень	два орли (2 O)	дві решки (2 P)	орел і решка (O, P)

Рис. 10. Зміна цін, що генерується киданням монет.

Хай імітується період тривалістю 20 днів; монети кидаються 20 разів. Результати послідовного кидання монет представлені в таблиці на рис.11. Початкові умови такі: в нульовий день ціна акції 10 доларів і вона збігається з відповідним показником в попередній день.

День	Результат кидання монет	Напрямок зміни	Сьогоднішня ціна однієї акції
0	-	-	10
1	O/P	без зміни	10
2	2P	без зміни	9
3	2O	у бік спадання	10
4	2O	у бік зростання	10
5	2O	без зміни	11
6	O/P	у бік зростання	12
7	2O	те ж	12
8	2P	без зміни	11
9	2O	у бік спадання	12
10	P/O	у бік зростання	13
11	2P	у бік зростання	12
12	O/P	у бік спадання	11
13	2P	те ж	11
14	2O	без зміни	12
15	O/P	у бік зростання	13
16	O/P	у бік зростання	14
17	2P	те ж	13
18	O/P	у бік спадання	12
19	O/P	те ж	11
20	2P	те ж	11

Рис. 11. Результати імітування зміни цін акцій

Тепер використовуючи конкретні дані про зміну цін протягом 20-денного періоду, ми можемо перевірити, наскільки правильною є запропонована стратегія. Результати поведінки містера N згідно з запропонованою стратегією наведені на рис. 12.

З першого погляду розглянута стратегія не є вигідною. Проте поспішати не треба. Вибраний період містить і вигідні позиції. Це 6 і 16 днів. Тривалість імітування зміни цін короткий. Точні результати неможливо одержати. Період імітування потрібно збільшити у декілька разів. У такому разі одержані дані будуть більш вірогідні. Можливо, спостерігатиметься деяка періодичність появи вигідних позицій.

День	Ціна акції (\$)	Рішення	Кількість акцій на руках	Вартість пакета акцій (\$)	Готівка (\$)
0	10		100	1000	
1	10		100	1000	
2	9	продати	0	0	882,00
3	10	купити	86	860	4,80
4	10		86	860	4,80
5	11		86	946	4,80
6	12		86	1032	4,80
7	12		86	1032	4,80
8	11	продати	0	0	931,88
9	12	купити	76	912	1,64

Закінчення таблиці

10	13		76	988	1,64
11	12	продати	0	0	895,40
12	11		0	0	895,40
13	11		0	0	895,40
14	12	купити	73	876	1,88
15	13		73	949	1,88
16	14		73	1022	1,88
17	13	продати	0	0	931,90
18	12		0	0	931,90
19	11		0	0	931,90
20	11		0	0	931,90

Мал.12. Результати поведінки містера N

Запитання для самоперевірки

1. Коли застосовне імітаційне моделювання?
2. Що означає побудувати імітаційну модель?
3. Як визначається подія в імітаційному моделюванні?
4. Яку початкову інформацію необхідно задати при побудові імітаційної моделі?
5. Що вважається результатом імітаційного моделювання?

Лекція 12. Матричні балансові моделі

Використання матричних балансових моделей. Структура моделі. Основні прогностні моделі.

Складання прогностної балансової моделі.

Для аналізу і планування виробництва і розподілу продукції на різних умовах господарювання застосовуються матричні балансові моделі. Основоположником цих моделей є російський вчений В.П. Леонт'єв. Їм була розроблена балансова модель у розрізі галузей. Дана модель, тепер названа моделлю Леонт'єва, застосовується досить часто. Якщо існують якісь об'єднання (типу корпорацій) економічних суб'єктів, що кооперують між собою з метою отримання більшого прибутку для даного об'єднання, і, врешті-решт, для кожного члена цього об'єднання, то вони можуть планувати свою діяльність, використовуючи балансові моделі. Збільшення прибутку досягається за рахунок спеціалізації виробництва засобів виробництва, якими користуються всі члени об'єднання.

Сьогодні в індустріально розвинених країнах часто застосовується кластерна модель розвитку економіки. Кластерна модель передбачає об'єднання декількох підприємств, що випускають різну конкурентноздатну продукцію. Для планування їх взаємної діяльності також використовується матрична балансова моделі.

Класична матрична балансова модель представлена на мал.13.

Що виробляють галузі	Споживаючі галузі					Кінцева продукція	Валова продукція
	1	2	3	.	n		
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	.	x_{1n}	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	.	x_{2n}	y_2	x_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	.	x_{3n}	y_3	x_3
.	.	.	.	I	.	II	.
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	.	x_{nn}	y_n	x_n
Оплата праці	v_1	v_2	v_3	III	v_n	$v_{\text{кон}}$ IV	-
Чистий дохід	m_1	m_2	m_3	.	m_n	$m_{\text{кон}}$	-
Валова продукція	X_1	X_2	X_3	.	X_n	-	X

Рис. 13. Загальна схема міжгалузевого балансу.

Дані, які складають матрицю і характеризують матеріальні взаємостосунки між галузями, підрозділяються на 4 квадрати (I, II, III, IV):

I квадрат – матеріальні потоки x_{ij} між галузями, що зумовлюють виробництво і споживання засобів виробництва кожної галузі;

II квадрат – об'єм виробництва кінцевої продукції y_i кожної галузі тобто продукція йде на споживання поза сфери виробництва;

III квадрат – чиста продукція кожної галузі, що йде на споживання усередині кожної галузі (v_j і m_j)

IV квадрат – величина національного доходу ($v_{\text{кон}}$ і $m_{\text{кон}}$), структура яка складається або з сукупності кінцевої або чистої продукції всіх галузей.

Балансовою величиною є валова продукція, так званий сукупний продукт. Галузі розглядаються в двох аспектах – як виробляюча (позначимо через i) і споживаюча (позначимо через j).

Таким чином, сукупний продукт X_i i -й галузі розглядається як з виробництва засобів виробництва для всіх галузей плюс кінцевий продукт. Математично це виражається як система рівнянь (балансова модель)

$$X_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad i = \overline{1, n}$$

Чиста продукція кожної галузі може містити декілька складових. У початковій моделі Леонт'єва це розглядається як оплата праці і чистий дохід ($v_j + m_j$). Друга балансова модель записується у вигляді системи рівнянь

$$X_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} + m_j + v_j, \quad j = \overline{1, n}$$

Величина національного доходу розглядається так:

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{j=1}^n m_j + \sum_{j=1}^n v_j$$

Наявність такого балансу очевидна. Підсумувавши рівняння першої моделі за інтервалом і і другий за індексом j, одержимо останнє співвідношення.

Модель Леонт'єва використовувалася для прогнозування величини національного доходу, а тим самим для прогнозування кінцевої і валової продукції, що у свою чергу дає можливість планувати розподіл капіталовкладень для розвитку окремих галузей, планування транспорту і т.д.

Прогнозована модель будується з використанням прямих або повних матеріальних витрат. Прямі матеріальні витрати a_{ij} показують, скільки витрачає і-я галузь для виробництва одиниць продукції j-й галузі. Математично це запишеться так:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j},$$

звідси $x_{ij} = a_{ij} X_j$. Використовуючи це співвідношення, перепишемо першу балансову модель

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + y_i, \quad i = \overline{1, n}$$

Дані балансові співвідношення є основною математичною моделлю прогнозування, тобто складання балансової матричної моделі на наступний плановий період.

Використовуючи перетворення алгебри, можна одержати так звану матрицю повних матеріальних витрат. Запишемо у векторному вигляді останню систему рівнянь

$$X = aX + Y$$

Нехай E одинична матриця розмірності n. Тоді вірно співвідношення $X = EX$. Звідси - $X = Y * (E - a)^{-1}$

де $(E - a)^{-1}$ обернена матриця, звана матрицею повних матеріальних витрат. Позначимо її через A, тоді

$$X_j = \sum_{i=1}^n A_{ij} Y_i, \quad j = \overline{1, n}$$

Це інша форма запису математичної моделі, що використовується для прогнозування.

Перепишемо другу балансову модель, використовуючи матрицю прямих матеріальних витрат

$$X_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} X_i + V_j + m_j, \quad j = \overline{1, n}$$

Чиста продукція j-й галузі, визначається з системи рівнянь

$$v_j + m_j = X_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} X_i \quad j = \overline{1, n}$$

Виходячи з матричної моделі, можна визначити коефіцієнт прямих і повних трудових витрат на одиницю продукції, а також прямої і повної фондівдачі [7]

Приклад

Є звітний міжгалузевий баланс (Рис. 14).

Що проводять галузі	Споживаючі галузі			Кінцева продукція тис. грн	Валова продукція тис. грн
	1	2	3		
1	32,4	10,0	10,6	55,0	108,0
2	16,0	12,0	0,0	12,0	40,0
3	10,6	4,0	6,4	32,0	53,0
v_i	9,8	2,8	7,2	99	-
m_i	39,2	11,2	28,8		-
Валова продукція, тис. грн.	108,8	40,0	53,3	-	201

Рис. 14. Звітний міжгалузевий баланс.

Нехай об'єм кінцевої продукції на планований період складає $y_i ::= 60; 15; 40$ тис. грн. Необхідно скласти балансову модель на планований період.

Визначаються прямі матеріальні витрати виходячи з однієї звітної моделі:

$$a_{11} = 32,4/108,0 = 0,30$$

$$a_{21} = 16,0/108,0 = 0,15$$

$$a_{31} = 10,6/108,0 = 0,10$$

$$a_{12} = 10,0/40,0 = 0,25$$

$$a_{22} = 12,0/40,0 = 0,30$$

$$a_{32} = 4,0/40,0 = 0,10$$

$$a_{13} = 10,6/53,0 = 0,20$$

$$a_{23} = 0,0/53,0 = 0,0$$

$$a_{33} = 6,4/53,0 = 0,12$$

$$a = \begin{bmatrix} 0,30 & 0,25 & 0,20 \\ 0,15 & 0,30 & 0,0 \\ 0,10 & 0,10 & 0,12 \end{bmatrix}$$

Перша балансова модель за заданими прямими витратами і планованою кінцевою продукцією запишеться так:

$$\begin{cases} X_1 = 0,30X_1 + 0,25X_2 + 0,20X_3 + 60,0 \\ X_2 = 0,15X_1 + 0,30X_2 + 0,0X_3 + 15,0 \\ X_3 = 0,10X_1 + 0,10X_2 + 0,12X_3 + 40,0. \end{cases}$$

Переформуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0,70X_1 - 0,25X_2 - 0,20X_3 = 60,0 \\ 0,15X_1 + 0,70X_2 = 15,0 \\ 0,10X_1 + 0,10X_2 + 0,88X_3 = 40,0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь методом Жордана–Гаусса, набудемо значення X_1 , X_2 і X_3 , тобто об'єми валової продукції на планований період:

$$X_1 = 120,63; X_2 = 46,76; X_3 = 64,96.$$

Вважається, що величина прямих матеріальних витрат не змінюється, переходячи з одного планового періоду в інший, можна визначити матеріальні потоки між галузями на плановий період. Виходячи з формули визначимо значення x_{ij} . Матриця матеріальних потоків

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Друга балансова модель за відомими об'ємами валової продукції і матеріальними потоками запишеться так:

$$\begin{cases} 20,63 = 66,34 + m_1 + v_1 \\ 46,76 = 30,40 + m_2 + v_2 \\ 64,96 = 20,79 + m_3 + v_3 \end{cases}$$

звідси загальну чисту продукцію складе

$$m_1 + v_1 = 54,29$$

$$m_2 + v_2 = 16,36$$

$$m_3 + v_3 = 44,17$$

Розподіляючи її з урахуванням 20 % v_j і 80 % m_j , одержуємо

$$v_1 = 10,86; v_2 = 3,27; v_3 = 8,83$$

$$m_1 = 43,43; m_2 = 13,09; m_3 = 35,34.$$

Планований міжгалузевий баланс наведений на рис. 15.

Що проводять галузі	Споживаючі галузі			Кінцева продукція тис. грн	Валова продукція тис. грн
	1	2	3		
1	36,19	11,63	12,99	60,0	120,63
2	18,09	14,03	0,0	15,0	46,76
3	12,06	4,68	7,80	40,0	64,96
v _j	10,86	3,27	8,83	115,0	-
m _j	43,43	13,09	35,34		-
Валова продукція, тис. грн.	120,63	46,76	64,96	-	232,35

Рис. 15. Планований міжгалузевий баланс

Список літератури

1. Юхименко Б.И. Эконометрия / Учебное пособие. Одесса, Издательство “Фенікс”.- 2015.- 216с.
2. Диха М. В. Економетрія: навчальний посібник [текст] / М. В. Диха, В. С. Мороз – К. : «Центр учбової літератури», 2016. – 206 с.
3. Економетрія. Ч. 1: навч. посібник / О. Волошин, Н. Галайко. – Львів: Львівський державний університет внутрішніх справ, 2012. – 192 с.
4. Доля В.Т. Економетрія: навч. посібник / В.Т. Доля; Харк. нац. акад. міськ.госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2010. – 171 с.
5. Наконечний С. І., Терещенко Т.О., Романюк Т. П. Н 22 Економетрія: Підручник. — Вид. 3-тє, доп. та перероб. — К.: КНЕУ, 2004. — 520 с.
6. Ю. Толбатов. Економетрика: Навчальний посібник. – К.: Четверта хвиля, 2003. – 320 с.