

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية بجاية

وزارة التربية الوطنية

ثانوية الحمادية – بجاية

امتحان البكالوريا التجريبي

دورة : ماي 2019

الشعبة : رياضيات

المدة : 4سا و 30 دقيقة

أختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

كيس يحتوي على 9 كريات لا يميز بينها باللمس منها 5 حمراء مرقمة بالأرقام 1، 1، 1، 3، 3 و 4 كريات سوداء مرقمة كلها بالرقم 2
❖ نسحب عشوائيا في ان واحد كريتين من الكيس.

1/ أحسب احتمالات الأحداث الآتية: A " الكريات مختلفة الألوان "

B " الكريات من اللون الأحمر "

" الكريات تحمل نفس الرقم علما انها حمراء "

C

2/ نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع الأرقام التي تظهر على الكريات .

أ/ حدد قانون احتمال X

ب/ أحسب الأمل الرياضي لـ X

3/ نفرض أن عملية السحب نعيدها 4 مرات متتالية وفي كل مرة نعيد الكريتين المسحوبتين الى الكيس ونعتبر المتغير العشوائي Y

الذي يرفق بكل عملية عدد مرات الحصول على كريتين مختلفتين في اللون . حدد قانون احتمال Y

التمرين الثاني : (4 نقاط)

(u_n) و (v_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين بـ : $u_0 = 5$ ، $u_1 = 31$ ، $v_0 = -1$ و $v_1 = -11$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{cases} u_{n+2} = 12u_{n+1} - 35u_n \\ v_{n+2} = 12v_{n+1} - 35v_n \end{cases}$$

ولتكن المتتاليتين العدديتين (x_n) و (y_n) المعرفتين من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $x_n = u_n + v_n$ و $y_n = u_n - v_n$

1/ أحسب x_0 و x_1 ثم برهن أن المتتالية (x_n) هندسية أساسها 5

2/ برهن أن المتتالية (y_n) هندسية بنفس طريقة السؤال 1/

الصفحة 1 من 6

3/ أحسب x_n و y_n بدلالة n ثم عبر عن u_n و v_n بدلالة n .

4/ من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $d_n = p \gcd(u_n; u_{n+1})$

أ/ ماهي القيم الممكنة لـ d_n ب/ هل u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما ؟

التمرين الثالث: (5 نقاط)

ليكن r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي حيث $0 \leq \theta \leq \pi$ ومن أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$$u_n = |Z_n| \quad \text{ونضع :} \quad Z_0 = re^{i\theta} \quad \text{و} \quad Z_{n+1} = \frac{1}{2}(Z_n + |Z_n|)$$

الجزء الأول :

1/ نضع : $\theta = 0$ و $Z_0 = r$ أحسب : Z_1 ، Z_2 و Z_3 ثم ضع تخمينا حول العدد المركب Z_n ثم برهن صحة التخمين بالتراجع .

2/ نضع : $\theta = \pi$ و $Z_0 = -r$ أحسب : Z_1 ، Z_2 و Z_3 ثم ضع تخمينا حول العدد المركب Z_n ثم برهن صحة التخمين بالتراجع .

الجزء الثاني : نضع : $0 < \theta < \pi$

1/ برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة ، ثم أستنتج أنها متقاربة .

$$e^{ix} + 1 = 2e^{i\frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2} \quad \text{2/ أ) برهن أن من أجل كل عدد حقيقي } x :$$

$$Z_n = \frac{r \sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} e^{i\frac{\theta}{2^n}}$$

ب) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n :

ج) أستنتج $\operatorname{Re}(Z_n)$ و $\operatorname{Im}(Z_n)$ بدلالة n .

3/ حدد النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} [\operatorname{Im}(Z_n)]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n \sin \frac{\theta}{2^n}) = \theta \quad /4 \text{ أ) برهن أن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad \text{ثم أحسب النهاية :} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} [\operatorname{Re}(Z_n)] \quad \text{ب) أستنتج :}$$

التمرين الرابع: (7 نقاط)

$$/1 \quad g \text{ الدالة العددية لمتغير حقيقي } x \text{ المعرفة على }]0; +\infty[\text{ بـ : } g(x) = x^2 e^x$$

الصفحة 2 من 6

. أدرس اتجاه تغير الدالة g على $]0; +\infty[$ ثم أستنتج أنه إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(x) < g(\frac{1}{x})$ وإذا كان $x > 1$ فإن

$$g(x) > g(\frac{1}{x})$$

$$/2 \quad f \text{ الدالة العددية لمتغير حقيقي } x \text{ المعرفة على }]0; +\infty[\text{ بـ : } f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$$

(c_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

. بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x) - g(\frac{1}{x})$ ثم أحسب $f'(1)$ وشكل جدول تغيرات f

$$/3 \quad h \text{ الدالة العددية لمتغير حقيقي } x \text{ المعرفة على }]0; +\infty[\text{ بـ : } h(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3e \text{ و } (c_h) \text{ تمثيلها البياني (أنظر الملحق)}$$

(1) بين أن المعادلة : $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حلين α و β حيث $0,5 < \alpha < 0,6$ و $1,5 < \beta < 1,6$ ثم

أستنتج أن المنحنى (c_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين .

(2) أدرس وضعية المنحنى (c_f) بالنسبة للمنحنى (c_h) .

(3) بين أن المنحنى (c_f) يقبل مماسا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 يطلب كتابة معادلة له . ثم أنشئ (T) و (c_f) .

$$/4 \quad m \text{ عدد حقيقي موجب تماما ، جد بيانيا قيم } m \text{ التي من أجلها المعادلة } f(x) = (m^2 - 2m + 2)e^m + h(m) \text{ تقبل حلين متمايزين}$$

5 / أ) بين أن من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$\int_1^x [f(t) - h(t)] dt = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$$

ب) λ عدد حقيقي من المجال $]0; 1]$ و $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (c_f) و (c_h) والمستقيمين

المعرفين بالمعادلتين $x = \lambda$ و $x = 1$

❖ أستخدم $A(\lambda)$ مقدرة بوحدة المساحة ثم أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow 0^+} A(\lambda)$

انتهى الموضوع الأول

الصفحة 3 من 6

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

❖ نعتبر المعادلة (E_n) ذات المجهولين الصحيحين x و y الآتية : $645x - 195y = 13^n - 54n - 1$ حيث n عدد طبيعي .

1/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة العدد 13^n على 15 ثم عين قيم n التي من أجلها المعادلة (E_n) تقبل حلولاً .

2 / أ) تحقق أن الثنائية $(1; 3)$ حل للمعادلة (E_2) ثم حل المعادلة (E_2) .

ب) العدد الطبيعي A يكتب $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ في النظام ذي الأساس 6 ويكتب $\overline{\beta 0444}$ في النظام ذي الأساس 5

• عين العددين α و β ثم أكتب A في النظام العشري .

ج) في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر المستقيم (Δ) المعروف بتمثيله الديكارتي كما يلي :

$$\begin{cases} 3x - y - 12z = 0 \\ x - y - 90z + 2 = 0 \end{cases}$$

. بين أن احداثيات نقط المستقيم (Δ) تحقق المعادلة (E_2) ثم أستنتج مجموعة النقط M من (Δ) التي احداثياتها أعداد صحيحة

التمرين الثاني : (4 نقاط)

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \diamond \text{ المتتالية } (u_n) \text{ معرفة من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ بـ :}$$

1/ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0;1]$ بـ : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

• أحسب $f'(x)$ ثم أستنتج الحد الأول u_0

2/ أ) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم أستنتج أنها مقاربة .

ب) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n غير المعدوم : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)}$ (1) ثم أستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

3/ من أجل $n \geq 3$ نضع $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx$

(1) تحقق أن من أجل $n \geq 3$: $u_n + u_{n-2} = I_n$

(2) باستعمال التكامل بالتجزئة على I_n بين أن من أجل $n \geq 3$: $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$

الصفحة 4 من 6

(3) أستنتج أن من أجل $n \geq 3$: $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$(2)

ج) بوضع $v_n = nu_n$ وباستعمال المتباينتين (1) و (2) بين أن (v_n) مقاربة نحو عدد حقيقي يطلب تعيينه .

التمرين الثالث : (5 نقاط)

أ. $P(z)$ كثير حدود بمتغير مركب z معرف بـ : $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$

1/ جد الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد مركب : $P(z) = (z+3)(az^2 + bz + c)$

2/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب

$$z_C = \overline{z_B} \text{ و } z_B = 1+i , z_A = -1 \text{ حيث : } z_C \text{ و } z_B , z_A$$

1/ S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ حيث : $z' = (1+i)z + i$

(1) ما طبيعة التحويل S ؟ جد عناصره المميزة .

(2) من أجل M تختلف عن A أحسب الجداء السلمي : $\overline{AM} \cdot MM'$ ثم حدد طبيعة المثلث AMM'

2/ ليكن n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن A لاحقتها العدد المركب z_n

• نضع النقطة M_0 تنطبق على المبدأ O ومن أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1} = S(M_n)$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = (1+i)^n - 1$

(2) جد قيم العدد الطبيعي n حتى تكون النقط O ، A و M_n في استقامة .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

❖ الجزء الأول : φ الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$: $\varphi(x) = \ln|1+x| - \frac{x}{1+x}$

1/ أدرس تغيرات الدالة φ وشكل جدول تغيراتها .

2/ أ) بين أن من أجل كل x من المجال $[1; 2]$: $|\varphi(x)| < 0,45$

ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد من المجال $]-\infty; -1[$ نرمزاليه α حيث $\varphi(\alpha) = 0$ ، ثم تحقق أن : $-4,6 < \alpha < -4,5$

(4) وأستنتج إشارة $\varphi(x)$

f و g دالتين معرفتين على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = |1+x|^{\frac{1}{x}}; x \neq 0 \\ g(0) = e \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) = \frac{\ln|1+x|}{x}; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(c_f) و (c_g) التمثيليين البيانيين لهما على الترتيب في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

1/ أ) بين أن f و g مستمرتين عند الصفر

ب) نقبل أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند الصفر وأن : $f'(0) = -\frac{1}{2}$ بين أن g قابلة للاشتقاق عند الصفر وأن :

$$g'(0) = -\frac{e}{2}$$

2/ أدرس تغيرات كل من f و g وشكل جدول تغيراتهما .

3/ أنشئ المنحنيين (c_f) و (c_g)

4/ أ) بين أن من أجل كل x من المجال $[1; 2]$: $g(x) \in [1; 2]$

ب) بملاحظة أن من أجل كل x من $\mathbb{R}^* - \{-1\}$: $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \varphi(x) g(x)$

• تحقق أن من أجل كل x من $[1; 2]$: $|g'(x)| < 0,9$

انتهى الموضوع الثاني

انشاء الله موفقون في البكالوريا