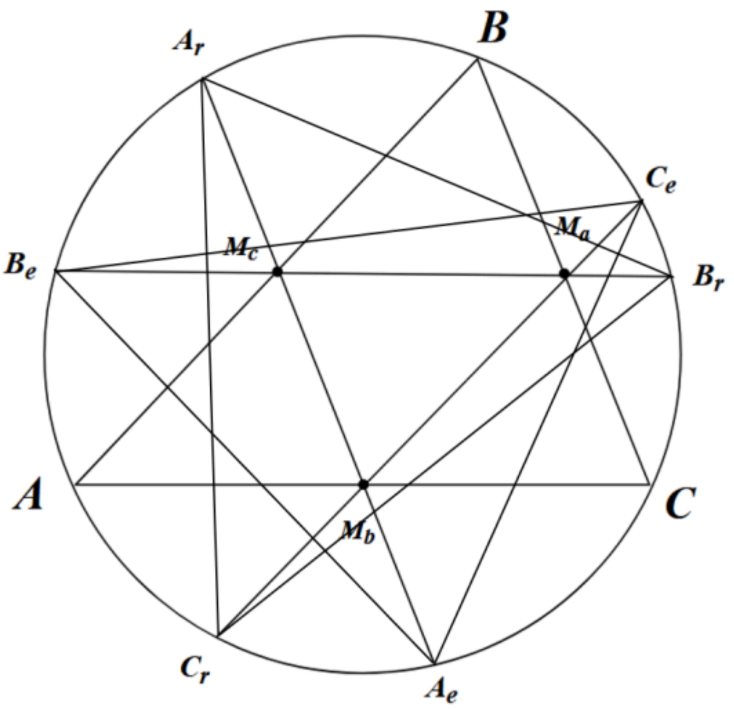
Исследовательские задания

<u>Задача 1. Левые и правые вписанные многоугольники</u>

I. А*) Пусть Ω Ω – описанная окружность треугольника ABC; точки M_a, M_b, M_c – M_a, M_b, M_c – середины сторон BC, CA, AB соответственно; A_e, B_e, C_e – A_e, B_e, C_e – точки пересечения Ω Ω с лучами M_cM_b, M_aM_c, M_bM_a M_cM_b, M_aM_c, M_bM_a соответственно; A_r, B_r, C_r – A_r, B_r, C_r – точки пересечения Ω Ω с лучами M_bM_c, M_cM_a, M_aM_b M_bM_c, M_cM_a, M_aM_b соответственно (см. рисунок). Докажите, что среднее арифметическое площадей треугольников $A_eB_eC_e$ $A_eB_eC_e$ и $A_rB_rC_r$ $A_rB_rC_r$, не меньше площади треугольника ABC.



Б*) Площадь левого треугольника не меньше площади ΔABC ΔABC и площадь правого треугольника не меньше площади ΔABC ΔABC, а равенство достигается только тогда, когда треугольник ABC равносторонний.

В) Докажите условие А) для вписанного четырехугольника.

Г) Докажите условие Б) для вписанного четырехугольника.

Д) Докажите условие А) для вписанного пятиугольника.

Е) Докажите условие Б) для вписанного пятиугольника.

Ж) Докажите условие А) для вписанного n-угольника.

З) Докажите условие Б) для вписанного n-угольника.

II. Исследуйте вопросы, аналогичные пунктам части **I,** если M_a, M_b, M_c – точки такие, что $AM_c : M_cB = BM_a : M_aC = CM_b : M_bA = 2:1$.

III. Попробуйте исследовать эту задачу при других отношениях отрезков, указанных в части **II.** Предложите свои направления исследования и изучите их.

---

* *См. «Квант»,* 2023 № 1.

<u>Задача 2. Бруски в коробке</u>

Пусть имеется n брусков и одна коробка, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, при этом i-ый брусок имеет размеры $a_i \times b_i \times c_i\, a_i \times b_i \times c_i$, а коробка – $a \times b \times c\, a \times b \times c$, где 0 < a $\le\le$ b $\le\le$ c и 0 < $a_i \le b_i \le c_i \le$ $a_i \le b_i \le c_i \le$ c, $a_i \le a\, a_i \le a$, $b_i \le b_i \le$ b, i $= \overline{1,n} = \overline{1,n}$. Кроме того, множество троек ($a_i,\, b_i,\, c_i\, a_i,\, b_i,\, c_i$), $i = \overline{1,n}\, i = \overline{1,n}$, отсортировано лексикографически по неубыванию, т. е. $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n\, a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$, если же $a_i = a_{i+1}\, a_i = a_{i+1}$, то $b_i \le b_{i+1}\, b_i \le b_{i+1}$, а если $a_i = a_{i+1}\, a_i = a_{i+1}$ и $b_i = b_{i+1}\, b_i = b_{i+1}$, то $c_i \le c_{i+1}$ $c_i \le c_{i+1}$, i $= \overline{1,n-1} = \overline{1,n-1}$. Какое максимальное число брусков $k\, k$ может поместиться в этой коробке, если $n\, n$ – достаточно большое число, то есть $n > k$ $n > k$, и бруски в коробку можно класть только таким образом, чтобы их рёбра были параллельны или перпендикулярны рёбрам этой коробки?

1. Рассмотрите одномерный случай данной задачи, то есть, когда бруски и коробка – это отрезки, длины которых $a_i\, a_i$, $i = \overline{1,n} = \overline{1,n}$, и $a\, a$, соответственно. Для этого
- решите эту задачу, если $a_i = 3\, a_i = 3$, i $= \overline{1,m} = \overline{1,m}$, $a_i = 4\, a_i = 4$, i $= \overline{m+1,100} = \overline{m+1,100}$, и $a = 25\, a = 25$;
- решите эту задачу, если $a_i = const\, a_i = const$, $i = \overline{1,n} = \overline{1,n}$;
- постройте алгоритм решения одномерной задачи для произвольных $0 < a_i \le a$ $0 < a_i \le a$, $i = \overline{1,n} = \overline{1,n}$.

2. Рассмотрите двумерный случай данной задачи, то есть, когда бруски и коробка – это прямоугольники, размеры которых $a_i \times b_i\, a_i \times b_i$, i $= \overline{1,n} = \overline{1,n}$, и $a \times b\, a \times b$, соответственно. Для этого решите эту задачу или постройте алгоритм решения, если
- $a_i = 3\, a_i = 3$, $b_i = 5\, b_i = 5$, $i = \overline{1,m} = \overline{1,m}$, $a_i = b_i = 4\, a_i = b_i = 4$, i $= \overline{m+1,100} = \overline{m+1,100}$, и $a = 7\, a = 7$, $b = 12$ $b = 12$, или $a = 16\, a = 16$, $b = 19$ $b = 19$, или $a = 6\, a = 6$, $b = 15$ $b = 15$;
- все прямоугольные бруски – одинаковые квадраты;
- $a_i = const\, a_i = const$, $b_i > a\, b_i > a$, $i = \overline{1,n} = \overline{1,n}$;
- $b_i > a\, b_i > a$, $i = \overline{1,n} = \overline{1,n}$;
- все прямоугольные бруски имеют одинаковые размеры;

- все прямоугольные бруски – квадраты;
- на размеры прямоугольных брусков нет никаких ограничений, отличных от заданных в условии задачи, то есть общий случай.

3. Рассмотрите исходную задачу (трёхмерный случай). Для этого решите эту задачу или постройте алгоритм решения, если

- $a_i = 3\, a_i = 3$, $b_i = 4\, b_i = 4$, $c_i = 5\, c_i = 5$, $i = \overline{1,m} = \overline{1,m}$, $a_i = b_i = c_i = 4$ $a_i = b_i = c_i = 4$, $i = \overline{m+1,100} = \overline{m+1,100}$, и $a = 7\, a = 7$, $b = 9\ b = 9$, $c = 12$ $c = 12$, или $a = 16\, a = 16$, $b = 19\ b = 19$, $c = 25\ c = 25$, или $a = 6\, a = 6$, $b = 8\ b = 8$, $c = 15\ c = 15$;
- все бруски – одинаковые кубы;
- $a_i = const\, a_i = const$, $b_i = const\, b_i = const$, $b_i > a\, b_i > a$, $c_i > b\, c_i > b$, $i = \overline{1,n} = \overline{1,n}$;
- $a_i = const\, a_i = const$, $b_i > a\, b_i > a$, $c_i > b\, c_i > b$, $i = \overline{1,n} = \overline{1,n}$;
- $b_i > a\, b_i > a$, $c_i > b\, c_i > b$, $i = \overline{1,n} = \overline{1,n}$;
- $a_i = b_i = const\, a_i = b_i = const$, $i = \overline{1,n} = \overline{1,n}$;
- все бруски имеют одинаковые размеры;
- все бруски – кубы;
- $a_i = b_i\, a_i = b_i$, $i = \overline{1,n} = \overline{1,n}$;
- на размеры брусков нет никаких ограничений, отличных от заданных в условии задачи, то есть общий случай.

4. Попробуйте для каждого предыдущего пункта найти среди всех размещений брусков в коробке, которые удовлетворяют решению задачи, такое размещение, при котором объём (площадь, длина) свободного пространства коробки будет минимальным. В каких случаях это размещение будет иметь минимальный объём (площадь, длина) свободного пространства коробки среди всех возможных размещений брусков в ней?
5. Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их.

<u>Задача 3. Сумма цифр в уравнениях и неравенствах</u>

Обозначим через $S(n)$ сумму цифр натурального числа n.

0. Решите неравенство $S(n) \geq n\, S(n) \geq n$.
1. Решите уравнение $(\mathrm{S}(n) - 2)^2 = n\ (\mathrm{S}(n) - 2)^2 = n$.
2. Решите неравенство $(\mathrm{S}(n) - 2)^2 \geq n\ (\mathrm{S}(n) - 2)^2 \geq n$.
3. Решите уравнение $(\mathrm{S}(n) - 3)^3 = n\ (\mathrm{S}(n) - 3)^3 = n$.
4. Решите неравенство $S^3(n) \geq n\, S^3(n) \geq n$.
5. Решите уравнение $(\mathrm{S}(n) - k)^k = n\ (\mathrm{S}(n) - k)^k = n$. Здесь и далее k – заданное натуральное число.

6. Решите неравенство $(S(n) - p)^k \geq n$ $(S(n) - p)^k \geq n$, p – заданное целое число.
7. Решите двойное неравенство $S^k(n) \geq n \geq S^{k-1}(x)$ $S^k(n) \geq n \geq S^{k-1}(x)$.
8. Предложите свои обобщения в этой задаче и изучите их.

Задача 4. Автомобили и стоянки города N

0. В городе N имеется ровно 100 автомобилей, номера которых 001, 002, …, 100 соответственно. Также в этом городе 50 стоянок, которые пронумерованы 00, 01, ..., 49. Автомобиль с номером X может припарковаться на стоянку с номером Y тогда и только тогда, когда из X можно получить Y путем вычеркивания одной цифры. Возникают два вопроса.

А) Все ли автомобили могут припарковаться на стоянки? И если ответ на первый вопрос «да», то, может быть, некоторые стоянки можно снести и возникает второй вопрос.

Б) Какое наименьшее количество стоянок необходимо оставить в городе N, чтобы на них можно было припарковать все машины?

1. Решите пункт 0 в случае, если в городе N имеется ровно 300 автомобилей, номера которых 100, 101, …, 399 соответственно.

2. Решите пункт 0 в случае, если в городе N имеется ровно 1000 автомобилей, номера которых 000, 001, …, 999 соответственно.

3. Решите пункт 1 и 2 в случае, если в городе N имеется 100 стоянок, которые пронумерованы 00, 01, ..., 99.

4. Ответьте на вопросы пункта 0 в случае, если в городе N имеется ровно 10 000 автомобилей, номера которых 0000, 0001, …, 9999, а стоянок 100 и пронумерованы они 00, 01, ..., 99. Автомобиль с номером X может припарковаться на стоянку с номером Y тогда и только тогда, когда из X можно получить Y путем вычеркивания двух (не обязательно стоящих рядом) цифр.

5. А если автомобилей 10^k, где $k > 4$ натуральное число, стоянок 100 и автомобиль с номером X может припарковаться на стоянку с номером Y тогда и только тогда, когда из X можно получить Y путем вычеркивания $k - 2$ (не обязательно стоящих рядом) цифр. При этом нумерация автомобилей и стоянок по аналогии с пунктом 4. Какими будут ответы на вопросы А) и Б)?

6. А если автомобилей 10^k и стоянок 10^{k-2}, где $k > 4$ натуральное число, и автомобиль с номером X может припарковаться на стоянку с номером Y тогда и только тогда, когда из X можно получить Y путем вычеркивания двух (не обязательно стоящих рядом) цифр. При этом нумерация автомобилей и стоянок по аналогии с пунктом 4. Какими будут ответы на вопросы А) и Б)?

7. Пусть в городе N имеется ровно $T < 1\,000$ автомобилей, номера которых 000, 001, …, $T - 1$, а стоянок $S < 100$ и пронумерованы они 00, 01, ..., $S - 1$. Автомобиль с номером X может припарковаться на стоянку с номером Y тогда и только тогда, когда из X можно получить Y путем вычеркивания одной цифры. Какими будут ответы на вопросы А) и Б)?

8. Решите пункт 5 и 6 в случае, если вычеркиваемые цифры обязательно стоят подряд, то есть, между ними нет других цифр.

9. Предложите свои обобщения в этой задаче и изучите их.

Задача 5. Особенные подмножества

Предварительное замечание. Везде в этой задаче рассматриваются неупорядоченные множества и подмножества (т.е. $\{1, 2, 3\}$ и $\{3, 1, 2\}$ – это одно и то же множество). Пустое множество является подмножеством любого множества.

Раздел 1

1. Во скольких подмножествах множества $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ не найдется двух подряд идущих чисел?
2. А если множество в пункте 1 состоит из чисел $1, 2,\ldots, n$?
3. Во скольких подмножествах множества $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ не найдется трех подряд идущих чисел?
4. А если множество в пункте 3 состоит из чисел $1, 2,\ldots, n$?
5. Сможете ли вы решить задачу в общем случае? Во скольких подмножествах множества $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ не найдется m подряд идущих чисел?

Раздел 2

1. Во скольких подмножествах множества $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ не найдется чисел, между которыми разность меньше 3? Решите, аналогичную задачу для множества чисел от 1 до n.
2. Во скольких подмножествах множества $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ не найдется чисел, между которыми разность равна 2? Решите, аналогичную задачу для множества чисел от 1 до n.
3. Во скольких подмножествах множества $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ не найдется чисел, между которыми разность равна или 2 или 3 или 5? Решите, аналогичную задачу для множества чисел от 1 до n.
4. Попробуйте исследовать данную постановку в общем виде. Есть множество запрещенных разностей $R = \{r_1, r_2,\ldots,r_m\}$. Во скольких подмножествах множества $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ не найдется чисел, между которыми разность принадлежит множеству запрещенных разностей.

Раздел 3

1. Рассмотрим всевозможные непустые подмножества множества $\{1, 2, ..., N\}$, не содержащие подряд идущих чисел. Для каждого подмножества вычислим произведение его элементов. Чему равна сумма квадратов этих произведений?

Раздел 4

1. Пусть множество М состоит из чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 25\}$. Эти числа расположены в таблице Т змейкой:

1	2	3	4	5

10	9	8	7	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16
21	22	23	24	25

Числа, которые расположены в соседних по вертикали или горизонтали клетках назовем «близкими». Сколько подмножеств у множества М в которых не найдется двух близких чисел?

2. А если «близкими» числами считать числа в клетках по диагонали. Например, у 12 «близкие» числа это 8, 10, 18 и 20.
3. Попробуйте объединить условия «близости» из пунктов 1 и 2 т.е. у числа 12 будет восемь близких чисел: 8, 9, 10, 11, 13, 18, 19, 20
4. Попробуйте решить аналогичные задачи (п.1-3) если числа в таблице Т расположены по спирали:

1	2	3	4	5
16	17	18	19	6
15	24	25	20	7
14	23	22	21	8
13	12	11	10	9

5. Попробуйте исследовать аналогичные задачи для других множеств из n^2 чисел и квадратных таблиц или из mn чисел и прямоугольных таблиц.

<u>Задача 6. Порядок в перестановках</u>

Пусть σ и τ — две различные перестановки чисел от 1 до *n*. Перестановки σ и τ будем называть *сравнимыми*, если для любых двух наборов действительных чисел $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$ и $b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$ выполняется либо $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\tau(i)}$, либо $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \ge \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\tau(i)}$. В первом случае будем писать $\sigma \preccurlyeq \tau$, а во втором случае — $\sigma \succcurlyeq \tau$.

Если $\sigma \preccurlyeq \tau$, то будем говорить, что перестановка σ *хуже* перестановки τ, а перестановка τ *лучше* перестановки σ.

Будем говорить, что перестановки σ_1, σ_2, …, σ_k образуют *цепь*, если $\sigma_1 \preccurlyeq \sigma_2 \preccurlyeq \dots \preccurlyeq \sigma_k$, возможно в другом порядке. Количество перестановок будем называть *длиной цепи*. Если не существует перестановки $\tau \tau$, такой, что перестановки $\sigma_1 \sigma_1$, $\sigma_2 \sigma_2$, …, $\sigma_k \sigma_k$, $\tau \tau$ образуют цепь, то цепь будем называть *не удлиняемой*.

1. Докажите, что для любой перестановки $\sigma \sigma$ отличной от $(1,2,\ldots,n)$ $(1,2,\ldots,n)$ и $(n, n-1, \ldots, 1)$ $(n, n-1, \ldots, 1)$ есть перестановки $\tau_1 \tau_1$ и $\tau_2 \tau_2$ такие, что $\tau_1 \preccurlyeq \sigma \preccurlyeq \tau_2$ $\tau_1 \preccurlyeq \sigma \preccurlyeq \tau_2$.

2. Пусть $n = 3$ $n = 3$. а) Правда ли, что существую несравнимые перестановки, если да, то сколько таких пар? б) Чему равна длина наибольшей цепи? в) Сколько существует не удлиняемых цепей?

3. Пусть $n = 4$ $n = 4$. Ответьте на те же вопросы, что и в предыдущем пункте.

4. Для перестановок $\sigma \sigma$ и $\tau \tau$ предложите способ проверки являются ли они сравнимыми.

5. Для $n \geq 3$ $n \geq 3$ оцените длину наибольшей цепи.

6. Для $n \geq 3$ $n \geq 3$ оцените количество не удлиняемых цепей.

Будем говорить, что двойки перестановок (σ_1, σ_2) (σ_1, σ_2) *хуже* двойки перестановок (τ_1, τ_2) (τ_1, τ_2), если для любых наборов $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ и $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$ $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$ выполняется $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma_1(i)} c_{\sigma_2(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\tau_1(i)} c_{\tau_2(i)}$ $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma_1(i)} c_{\sigma_2(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\tau_1(i)} c_{\tau_2(i)}$.

7. Для $n = 3$ $n = 3$ опишите все пары двоек перестановок, в которых одна двойка хуже другой.

8. Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их.

<u>Задача 7. Дни здоровья БГУ</u>

1. Во время спартакиады «Дни здоровья БГУ» среди сотрудников БГУ был организован турнир по волейболу с выбыванием. В турнире принимали участие 8 команд. В первом круге команды случайным образом разбиваются на пары, так что любое разбиение равновероятно, и играется 4 матча. Победители выходят в следующий круг, где с помощью такого же процесса выявляется 2 победителя. В третьем круге определяется чемпион. Известно, что все команды в действительности упорядочены по силе игры, так что x_1 играет лучше всех, x_2 – лучше всех, кроме x_1, и так далее, команда x_8 играет хуже всех. Когда команда x_j играет с командой x_k и i <k, то с вероятностью p побеждает x_j и с вероятностью 1-p побеждает x_k, причем результаты их игры не зависят от исходов других встреч. Будем считать, что для всех j и k имеется одна и та же вероятность p.

   А) С какой вероятностью команда x_1 выиграет турнир?

   Б) С какой вероятностью в третьем круге будут участвовать две лучших команды x_1 и x_2?

В) С какой вероятностью во втором круге будут участвовать две лучших команды x_1 и x_2?

Г) С какой вероятностью x_2 выиграет турнир?

2. Во время спартакиады «Дни здоровья БГУ» среди сотрудников БГУ был организован турнир по волейболу с выбыванием. В турнире принимали участие 2^n команд. В первом круге команды случайным образом разбиваются на пары, так что любое разбиение равновероятно, и играется 2^{n-1} матчей. Победители выходят в следующий круг, где с помощью такого же процесса выявляется 2^{n-2} победителя. В k-м круге играется 2^{n-k} партия между 2^{n-k+1} до сих пор не выбывших команд. В n-м круге определяется чемпион. Известно, что все команды в действительности упорядочены по силе игры, так что x_1 играет лучше всех, x_2 – лучше всех, кроме x_1, и так далее, команда x_n играет хуже всех. Когда команда x_j играет с командой x_k и i <k, то с вероятностью p побеждает x_j и с вероятностью 1-p побеждает x_k, причем результаты их игры не зависят от исходов других встреч. Будем считать, что для всех j и k имеется одна и та же вероятность p.

А) С какой вероятностью команда x_1 выиграет турнир?

Б) С какой вероятностью в третьем круге будут участвовать две лучших команды x_1 и x_2?

В) С какой вероятностью в k-м с конца круге будут участвовать 2^k лучших команд?

Г) С какой вероятностью x_2 выиграет турнир?

Д) Обозначим $N(n)$ число существенно различных результатов турнира (два турнира считаются по существу совпадающими, если в них все матчи играются между теми же командами и победители одни и те же). Найдите значение $N(n)$.

Е) Докажите, что если $\frac{1}{2} < p < 1$, то вероятность выигрыша турнира игроком x_j строго больше, чем игроком x_{j+1} при $1 \le j < 2^n$.

<u>Задача 8. Параболы</u>

Пусть на координатной плоскости нам даны точка $F(x_0, y_0)$ $F(x_0, y_0)$, которую будем называть *фокусом*, график функции $y = f(x)$ $y = f(x)$, который будем называть *директрисой*, и метрика $\rho(A, B)$ $\rho(A, B)$ (расстояние между точками A A и B B).

Параболой будем называть геометрическое место точек равноудалённых от фокуса и директрисы.

В пунктах 1–3 под параболой будем иметь ввиду множество точек (x, y) (x, y) для которых выполняется равенство $\rho((x_0, y_0), (x, y)) = \rho((x, y), (x, f(x)))$ $\rho((x_0, y_0), (x, y)) = \rho((x, y), (x, f(x)))$, то есть в этих пунктах мы будем считать, что расстояние между точкой и графиком функции ищется как расстояние между двумя точками, имеющими одинаковую абсциссу.

1. Пусть $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ и $F(0;1)$ $F(0;1)$. Нарисуйте параболу и/или упростите её уравнение, если а) $f(x)=-1$ $f(x)=-1$; б) $f(x)=1$ $f(x)=1$; в) $f(x)=x$ $f(x)=x$; г) $f(x)=x+1$ $f(x)=x+1$; д) $f(x)=|x+1|$ $f(x)=|x+1|$; е) $f(x)=x^2$ $f(x)=x^2$.

2. Решите все подпункты пункта 1, если а) $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2|+|y_1-y_2|$; б) $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max(|x_1-x_2|,|y_1-y_2|)$ $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max(|x_1-x_2|,|y_1-y_2|)$.

В пунктах 3 и 4 под расстоянием между фиксированной точкой A A и некоторым множеством точек $\mathcal{B}$ $\mathcal{B}$ будем понимать $\min\{\rho(A,B)|B\in\mathcal{B}\}$ $\min\{\rho(A,B)|B\in\mathcal{B}\}$.

3. Решите пункты 1в)–1е), исходя из нового понимания расстояния между точкой и графиком функции, и различных метрик.

4. Нарисуйте параболу для расстояний из пунктов 1.–2., если $F(0;2)$ $F(0;2)$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

В пунктах 5 и 6 под параболой будем иметь в виду геометрическое место точек равноудалённых от некоторого множества $\mathcal{F}$ $\mathcal{F}$, которое будем называть *множеством фокусов*, и множества $\mathcal{D}$ $\mathcal{D}$, которое будем называть *направляющим множеством*. Под расстоянием между множествами $\mathcal{F}$ $\mathcal{F}$ и $\mathcal{D}$ $\mathcal{D}$ будем понимать $\min\{\rho(F,D)|F\in\mathcal{F},D\in\mathcal{D}\}$ $\min\{\rho(F,D)|F\in\mathcal{F},D\in\mathcal{D}\}$.

5. Изобразите параболу для расстояний между точками из пунктов 1.–3., если а) $\mathcal{F}=\{(0;1)\}$ $\mathcal{F}=\{(0;1)\}$, $\mathcal{D}=\{(0;-1)\}$ $\mathcal{D}=\{(0;-1)\}$; б) $\mathcal{F}=\{(-1,1),(1,1)\}$ $\mathcal{F}=\{(-1,1),(1,1)\}$, $\mathcal{D}=\{(0,0)\}$ $\mathcal{D}=\{(0,0)\}$; в) $\mathcal{F}=\{(-1,1),(1,1)\}$ $\mathcal{F}=\{(-1,1),(1,1)\}$, $\mathcal{D}=\{(-1,-1),(1,-1)\}$ $\mathcal{D}=\{(-1,-1),(1,-1)\}$.

6. Можно ли подобрать такие конечные множества точек $\mathcal{F}$ $\mathcal{F}$ и $\mathcal{D}$ $\mathcal{D}$, что парабола а) будет ограниченной, б) самопересекаться, в) замкнутой? Можно ли по графику параболы на координатной плоскости, зная что $\mathcal{F}$ $\mathcal{F}$ и $\mathcal{D}$ $\mathcal{D}$ — конечные множества точек, определить координаты всех точек во множествах $\mathcal{F}$ $\mathcal{F}$ и $\mathcal{D}$ $\mathcal{D}$.

7. Предложите свои обобщения в этой задаче и изучите их.

<u>Задача № 9. Сдвиг цифр</u>

Пусть $M=\{a_0,a_1,\dots,a_9\}$ $M=\{a_0,a_1,\dots,a_9\}$, где $a_0<a_1<\dots<a_9$ $a_0<a_1<\dots<a_9$ — целые числа, которые мы будем называть цифрами. Натуральные числа будем записывать в десятичной системе счисления, но будем использовать цифры из набора *M*. Для удобства записей, для чисел 10, 11, 12, … будем использовать буквы латинского алфавита *A*, *B*, *C*, ... соответственно, а для записи чисел –1, –2, –3, …, –9, –10, … будем использовать $\bar{1},\bar{2},\bar{3},\dots,\bar{9},\bar{A},\dots$ $\bar{1},\bar{2},\bar{3},\dots,\bar{9},\bar{A},\dots$. Например, запись $1A2$ $1A2$ означает число $1\cdot10^2+A\cdot10^1+2\cdot10^0=1\cdot100+10\cdot10+2=202$ $1\cdot10^2+A\cdot10^1+2\cdot10^0=1\cdot100+10\cdot10+2=202$ в привычной для нас десятичной

записи. А запись $\bar{1}5\bar{2}$ $\bar{1}5\bar{2}$ означает число $-1\cdot 10^2+5\cdot 10+(-2)\cdot 10^0=-100+50-2=-52$ $-1\cdot 10^2+5\cdot 10+(-2)\cdot 10^0=-100+50-2=-52$ в привычной для нас десятичной записи.

1. Пусть $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,A\}$ $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,A\}$. а) Запишите число 2023, используя указанные цифры. б) Докажите, что любое натуральное число можно записать, используя эти цифры. в) Существуют ли такие натуральные числа, которые, используя эти цифры, можно записать не одним способом?

2. Пусть $M=\{\bar{1},0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ $M=\{\bar{1},0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$. а) Запишите число 2023, используя указанные цифры. б) Можно ли любое натуральное число можно записать, используя эти цифры? в) Существуют ли такие натуральные числа, которые, используя эти цифры, можно записать не одним способом?

3. Пусть $M=\{2,3,4,5,6,7,8,9,A,C\}$ $M=\{2,3,4,5,6,7,8,9,A,C\}$. а) Запишите число 2023, используя указанные цифры. б) Можно ли любое натуральное число, большее 13, можно записать, используя эти цифры? в) Существуют ли такие натуральные числа, которые, используя эти цифры, можно записать не одним способом?

4. Пусть $M=\{a_i|a_i=i+t\}$ $M=\{a_i|a_i=i+t\}$, где $0\le i\le 9$ $0\le i\le 9$, а t t — произвольное фиксированное целое число (при $t=1$ $t=1$, получаем цифры из первого пункта; при $t=-1$ $t=-1$, получаем цифры из второго пункта). При каких значениях t используя цифры из набора M M а) можно записать все натуральные числа, начиная с некоторого числа $N(t)$ $N(t)$; б) записать все целые числа (без использования знака минус)?

Далее в пунктах 5, 6 и 7.б) рассматриваются системы счисления с основанием b.

5. Пусть $b\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$ $b\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$ — основание системы счисления, t — произвольное целое число, $M=\{a_i|a_i=i+t\}$ $M=\{a_i|a_i=i+t\}$, где $0\le i\le |b|-1$ $0\le i\le |b|-1$. При каких значениях $t(b)$ $t(b)$ используя цифры из набора M M а) можно записать все натуральные числа, начиная с некоторого числа N N; б) записать все целые числа (без использования знака минус)?

6. Какие условия должны быть на конечный набор целых чисел a_i a_i (не обязательно последовательных) таких, чтобы любое натуральное число, большее некоторого натурального числа N N, в системе счисления с основанием b, можно было записать, используя набор цифр a_i a_i? (Обратите внимание, что в этом пункте не требуется однозначность записи чисел и нет ограничения на количество цифр.)

7. Существует ли такой набор цифр c_1 c_1, c_2 c_2, …, c_k c_k, $c_i\in(\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z})\cup\{0\}$, используя который можно записать любое натуральное число а) в десятичной системе счисления, б) в системе счисления с основанием $b\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$ $b\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$? А если набор c_1 c_1, c_2 c_2, …, c_k c_k выбирается из $\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$?

Задача № 10. Зимний городок

1. В одном зимнем городе 5 домов. От каждого дома к каждому идет ровно одна дорожка. В одном из домиков живет мэр городка Вася, который также занимается

уборкой снега. После того как выпадает снег, Вася выезжает из своего домика и чистит все дорожки. Он проезжает по каждой дорожке ровно один раз и возвращается домой. Дорожки не пересекаются вне домиков (можем считать, что на визуальном пересечении одна дорожка по мосту проходит над другой). Сколькими способами Вася может почистить снег на всех дорожках в городе? Способы 1, 2, 3 и 3, 2, 1 – считаются разными.

2. Решите предыдущий пункт, если в городе 7 домов, n домов.
3. После того как Вася почистит все дорожки, его жена Маша идет по домам продавать пирожки. Она выходит из своего дома, проходит каждый дом ровно один раз, предлагая в каждом купить пирожки и возвращается домой. Сколько способов есть у Маши реализовать пирожки если в городе будет n домов и как в первых двух пунктах дорожки будут между всеми домами? (Если для каких-то n Вася не может выполнить свою работу, то считаем, что Вася при расчистке дорог по каким-то проехал два раза и перед тем как его жена выходит разносить пирожки все дорожки расчищены). Предположим Маша выходит в тот момент пока Вася не дочистил 1, 2, 3 или 4 дорожки и Маша проходит от одного дома к другому за то же время, что Вася расчищает одну дорожку. Сколько способов обойти дома будет у Маши?
4. Здесь и ниже будем считать, что в городке имеется некоторое натуральное число n домов, причем дорожки проложены так, что из любого дома можно попасть в любой другой, возможно, проходя через другие дома, но при этом необязательно все дома попарно соединены дорожками. Будем в дальнейшем называть схемой города правило (рисунок или описание), которое указывает, как дорожки соединяют дома в городе.

   а) Существует ли схема, в которой у Маши ровно 4 способа обойти все дома, а у Васи больше, чем k способов почистить дорожки для любого натурального k, большего 4?

   а) Существует ли схема, в которой у Маши ровно 4 способа обойти все дома, а у Васи больше k способов почистить дорожки для любого натурально k больше 4?

   в) Существуют ли схемы, для которых при заданных натуральных $k > m > 4$ у Маши не более m способов обойти все дома, а у Васи больше k способов почистить дорожки?
5. Пусть теперь в городе n домов, которые соединены по принципу кольцевой дороги (будем говорить далее «*цикла*»), т.е. все дома можно перенумеровать по порядку X_1, X_2, X_3, …, X_n так, что дорожками соединены все дома X_m и X_{m+1}, $m = 1, 2, 3, \dots n–1$, а также X_n и X_1. Дополнительно три домика, которые не являются соседями в описанном – *основном цикле,* попарно соединены дорожками. Других дорожек в схеме города нет. Сколько способов почистить дорожки в этом городе есть у Васи, и сколько маршрутов у Маши?
6. Тот же вопрос, что и в пункте 5, но дополнительными дорожками соединены не три дома, а k домов, попарно не являющихся соседями в основном цикле; при этом дополнительные дорожки тоже образуют отдельный цикл? Исследуйте данный вопрос в двух формулировках:

а) указанные k домов в основном цикле идут в той же последовательности, что и в отдельном цикле (разумеется, в основном цикле между этими домиками есть еще какие-то домики).

б) указанные k домов в основном цикле идут в некоторой другой последовательности (ср. схемы на рис. 1).

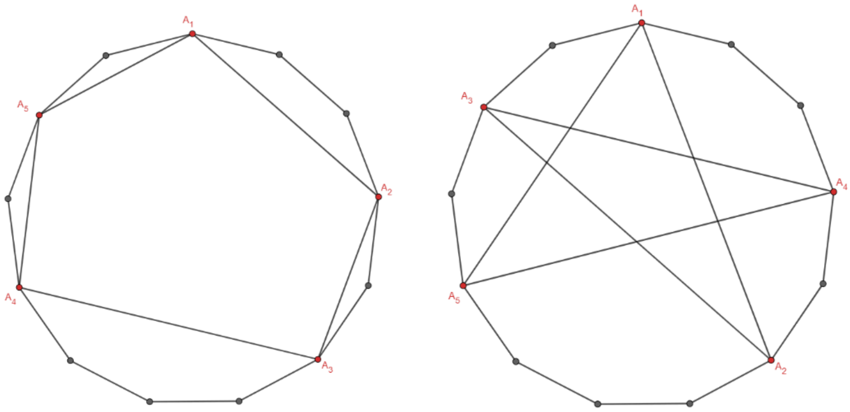


Рисунок 1. Схемы городов при n=13, k=5. Слева для пункта а), справа для пункта б).

7. Сколько способов сделать свою работу есть у Васи и у Маши, если в отличие от пункта 7 дополнительные дорожки образуют два треугольника? В частности, рассмотрите следующие варианты:

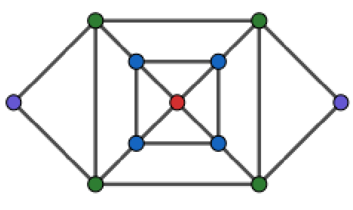
   а) k = 4; дополнительными дорожками соединены дома A, B, C и D (т.е. A, B, C и D – это некоторые дома из множества домов X_1, X_2, X_3, …, X_n), причем дополнительные дорожки – это AB, BC, CA, BD, DA.

   б) k = 5; дополнительными дорожками соединены дома A, B, C, D и E (т.е. A, B, C, D и E – это некоторые дома из множества домов X_1, X_2, X_3, …, X_n), причем дополнительные дорожки – AB, BC, CA, AD, DE, EA.

   в) k = 6; дополнительными дорожками соединены дома A, B, C, D, E, F (т.е. A, B, C, D, E, F – это некоторые дома из множества домов X_1, X_2, X_3, …, X_n), причем дополнительные дорожки – AB, BC, CA, DE, EF, DF.

8. Сколько способов сделать свою работу есть у Васи и Маши, если в цикле в отличии от пункта 7 будет два цикла $A_1A_2…A_kA_1$ и $A_1A_2…A_mA_1$ (здесь все A_p – это дома из множества X_1, X_2, X_3, …, X_n)? Попробуйте исследовать данный пункт в различных формулировках: если у циклов нет общих вершин и порядок вершин схож с порядком в основном цикле, нет общих вершин и порядок вершин любой, у циклов ровно одна общая вершина, общих вершин несколько.

9. Пусть теперь в городе 11 домиков и схема города показана на рисунке. Вася и Маша живут в доме, являющемся центром симметрии схемы города. Сколько способов у Васи и у Маши выполнить свою работу?



10. Придумайте свои направления исследования в этой задаче и изучите их.

Задача № 11. Графы и биоинформатика

Предлагаемая задача возникла в области биоинформатики. Исходная постановка задачи такова: имеется множество людей, недавно заразившихся некоторым инфекционным заболеванием. Требуется восстановить историю распространения эпидемии, т. е. установить, с кого началась инфекция, и кто кого заразил (на практике с использованием молекулярного анализа можно установить возможные пары участников процесса заражения).

Математически данную задачу можно сформулировать в терминах теории графов. Дан граф G, вершины которого ассоциируются с заболевшими, две вершины u и v смежны в графе G тогда и только тогда, когда возможна передача вируса от u к v или наоборот. Требуется найти связный остовный подграф графа G, который описывает историю распространения эпидемии. Как правило полагается, что один и тот же человек не может быть заражён дважды, поэтому можно считать, что искомый связный остовный подграф не содержит циклов, т. е. является остовным деревом.

Важную роль в построении математической модели задачи играет тот факт, что реальные графы, ассоциированные с вирусными заражениями (ВИЧ, Гепатит С), являются так называемыми scale-free графами (безмасштабными графами), обладающими рядом свойств, таких как степенной закон распределения степеней вершин, наличие вершин большой степени, малый диаметр. Хорошей теоретико-графовой мерой того, насколько граф G с множеством рёбер $E(G)$ близок к scale-free, служит следующая известная s-метрика графа G:

$$s(G) = \sum_{\{u,v\}\in E(G)} \deg_G u \cdot \deg_G v,$$

где через $\deg_G x$ обозначена степень вершины x в графе G. Графы с наибольшим значением s-метрики наиболее вероятно являются scale-free и, следовательно, возвращаясь к задаче, наиболее вероятно описывают историю распространению инфекции.

Следующий параметр, связанный с s-метрикой, назовём SF-размерностью графа G, будем обозначать его через $\tau(G)$ и определим равенством

$$\tau(G) = \max_T \{s(T)\},$$

где максимум берётся по всем остовным деревьям T графа G. Как было отмечено выше, остовы с наибольшим значением s-метрики наиболее вероятно описывают историю распространения инфекции. Остовное дерево графа G с наибольшим значением s-метрики будем называть оптимальным остовом.

Исследуйте следующие вопросы.

1) Определите значение параметра $s(G)$ для каждого из следующих графов: простая цепь P_n, простой цикл C_n, полный граф K_n, полный двудольный граф $K_{m,n}$,

полный многодольный граф $K_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ (предложите наиболее компактную запись для $s(K_{m_1, m_2, \ldots, m_k})$).

2) Для графа G обозначим: $d(v) = \deg_G v$ и $f(v) = \sum_{w \in N_G(v)} \deg_G w$, где $N_G(v)$ – окружение вершины v в графе G; $\boldsymbol{A}(G)$ – матрица смежности и $\boldsymbol{d}$ – вектор степеней графа; $t(G)$ – число треугольников и $\gamma_i(G)$ – число простых цепей длины i в графе. Докажите, что имеют место следующие комбинаторные соотношения для параметра $s(G)$:

а) $s(G) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d(v) \cdot f(v)$;

б) $s(G) = \frac{1}{2} \boldsymbol{d}^T \cdot \boldsymbol{A}(G) \cdot \boldsymbol{d}$;

в) $s(G) = t(G) + \gamma_3(G) + 2\gamma_2(G) + \gamma_1(G)$.

Предложите свои соотношения для s-метрики $s(G)$ в терминах других параметров графа G.

3) Обозначим через $ML(G)$ множество всех остовных деревьев графа G с наибольшим числом листьев (вершин степени 1). Пусть

$$l(G) = \max_{T \in ML(G)} s(T).$$

Понятно, что $\tau(G) \geq l(G)$. Верно ли, что $\tau(G) = l(G)$, т. е. оптимальный остов графа G является остовом с наибольшим числом листьев?

4) Если в пункте 3 задачи ответ на поставленный вопрос окажется отрицательным, постройте бесконечную серию соответствующих контрпримеров и изучите в общем случае поведение разности $\tau(G) - l(G)$. Например, ответьте на вопрос: может ли данная разность быть сколь угодно большим числом?

5) Докажите, что для произвольного графа G порядка n справедливы оценки $4n - 8 \leq \tau(G) \leq (n-1)^2$. Попробуйте охарактеризовать все графы G, для которых нижняя (соответственно, верхняя) оценка достижима.

6) Пусть на (n, m)-графе G (граф с n вершинами и m рёбрами) достигается максимально возможное значение $s(G)$. Докажите, что для любой пары вершин $u, v \in V(G)$ верно $N_G(u) \subseteq N_G(v) \cup \{v\}$ или $N_G(v) \subseteq N_G(u) \cup \{u\}$.

7) Основываясь на результате пункта 6, изучите структуру (n, m)-графа G с экстремальным значением параметра $s(G)$. Например, докажите, что такой граф не может содержать порождённых подграфов $2K_2$, P_4 и C_4. Какими другими структурными свойствами обладает такой граф G?

8) Пусть на (n, m)-графе G достигается максимально возможное значение $s(G)$ и пусть v – доминирующая вершина этого графа. Может ли граф, полученный из G

удалением вершины v и всех инцидентных ей рёбер, содержать порождённый подграф $K_{1,3}$?

9) Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

Общие понятия теории графов, не определяемые в задаче, можно найти в книге [Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах: Более 250 задач с подробными решениями. Изд. 7-е. – М.: ЛЕНАНД, 2017. – 240 с.].