УТВЕРЖДАЮ
Заместитель председателя
оргкомитета третьего этапа
республиканской олимпиады по
учебным предметам, заместитель
начальника управления образования
Могилевского облисполкома

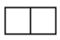
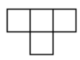
____________О.В.Стельмашок
«___» ноября 2012 г.

ЗАДАНИЯ
второго этапа республиканской олимпиады по учебному предмету
«Математика» 2012/2013 учебного года

Дата проведения: **1 декабря 2012г.**

10 класс

1. Купец нанял пароход для перевозки грузов на расстояние 1000 км. Он предлагает плату хозяину парохода в размере 1500 золотых монет, но требует вернуть 9 монет за каждый час пребывания парохода в пути. Пароход будет двигаться с постоянной скоростью. Если скорость будет равна V км/ч, то в конце пути хозяин должен выплатить команде премию в размере 10V монет. С какой скоростью хозяин должен вести пароход, чтобы заработать наибольшее число монет? Найти это число монет.

2. Рабочие должны были выложить пол прямоугольной комнаты плитками двух видов:
1)  и 2)  .

Размеры пола таковы, что он может быть полностью покрыт некоторым набором плиток указанных размеров. Нужное количество плиток каждого размера было подготовлено. Однако при переносе их к месту работы, рабочие уронили ящик с плитками первого вида и 6 плиток (первого вида) разбились. Их решили заменить тремя плитками второго вида. Докажите, что теперь выложить поверхность пола имеющимися плитками не удастся. (Резать плитки запрещается.)

3. Внутри выпуклого 14-угольника отмечено 1000 различных точек. На какое наибольшее число треугольников можно разрезать этот 14-угольник, если вершинами треугольников могут быть вершины 14-угольника и отмеченные точки?

4. Решить уравнение $20\{x\}-13[x]=0$, где $[x]$ – это наибольшее целое число, не превосходящее x; $\{x\}=x-[x]$.
<u>Примечание:</u> $[x]$ называется *целой частью* числа x. Например, $[5{,}2]=5$, $[7]=7$, $[-3{,}1]=-4$.
$\{x\}$ – называется *дробной частью* числа x. Например, $\{5{,}2\}=0{,}2$, $\{7\}=0$, $\{-3{,}1\}=0{,}9$.

5. Две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке С. К окружностям проведена общая касательная AB (A и B – точки касания окружностей ω_1 и ω_2 соответственно). Найдите радиусы окружностей ω_1 и ω_2, если радиус окружности, проходящей через точки A, B и C, равен 6, а площадь четырехугольника O_1ABO_2 равна 78.

Пользоваться калькулятором не разрешается

Время работы: 4,5 часа

Решения

Решения учащихся могут отличаться от предложенных авторских решений!

1. ***Решение***

Из условия следует, что количество монет N, которые заработает хозяин парохода, выражается формулой: $N = 1500 - \left(9 \cdot \frac{1000}{V} + 10V\right)$. Минимально возможное значение величины $\frac{9000}{V} + 10V$ можно определить при помощи производной, либо используя неравенство Коши: $\frac{9000}{V} + 10V$ $\geq 2\sqrt{\frac{9000}{V} \cdot 10V}$ $= 2\sqrt{90000} = 600$ (монет). Заработок хозяина в этом случае составит 1500 – 600 = 900 монет. Скорость, с которой хозяин должен вести пароход найдем из условия (если решали по неравенству Коши): $\frac{9000}{V} = 10V$, откуда V= 30 (км/ч).

***Ответ*: 30 км/ч, 900 монет.**

2. ***Решение.***

Разобьем пол на квадраты 1×1 (из условия следует, что это можно сделать) и раскрасим полученные квадраты в шахматном порядке в черный и белый цвета. Тогда 6 плиток вида 1 покрыли бы 6 черных и 6 белых клеток (т.е. четное количество). Но одна плитка вида 2 покрывает неодинаковое число черных и белых клеток: 3 черных и 1 белую, или 1 черную и 3 белые клетки. Тогда 3 плитки вида 2 покроют нечетные количества черных и белых клеток. Получили противоречие. Значит, выложить поверхность пола имеющимися плитками не удастся. Что и требовалось доказать.

3. ***Решение***

Заметим, что наибольшее число треугольников получится, если в качестве вершин этих треугольников будут задействованы все отмеченные точки. (Если отмеченная точка попадает внутрь какого-либо треугольника, то этот треугольник можно разрезать на более мелкие треугольники, соединив отрезками данную отмеченную точку с вершинами треугольника). Пусть 14-угольник разрезан на n треугольников, тогда сумма углов этих треугольников равна $180n$. С другой стороны сумма углов этих треугольников, вершиной которых является некоторая вершина 14-угольника, равна величине угла при данной вершине, а сумма углов этих треугольников, вершиной которых является внутренняя точка 14-угольника, равна 360º. Сумма всех углов 14-угольника равна 180º(14–2) = 180º·12. Тогда имеем: 180ºn = 180º·12 + 360º·1000, откуда n = 12 + 2·1000 = 2012.

Ответ: 2012 треугольников.

4. ***Решение***

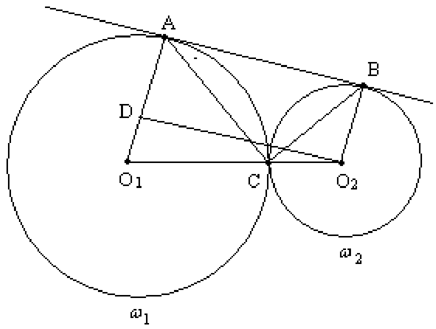
Из определения дробной части числа x следует, что $0 \leq \{x\} < 1$. Тогда имеем $\{x\} = \frac{13\,[x]}{20}$,

$0 \leq \frac{13[x]}{20} < 1$, $0 \leq [x] < \frac{20}{13}$. Получаем, что $[x] = 0$ или $[x] = 1$.

Если $[x] = 0$, то $\{x\} = 0$, и $x = 0$. Если $[x] = 1$, то $\{x\}$ = $\frac{13}{20}$ 0, и x = $1\frac{13}{20}$.

Ответ: 0; $1\frac{13}{20}$.

5. ***Решение***



Пусть C – точка касания окружностей ω_1 и ω_2 .
Докажем, что $\angle$ACB = 90º.

$\angle$BAC = $\frac{1}{2}$ AO$_1$C, $\angle$CBA = $\frac{1}{2}$ BO$_2$C. Но $\angle$AO$_1$C+$\angle$BO$_2$C=180º (внутренние односторонние при AO$_1$ ‖ BO$_2$ и секущей O$_1$O$_2$). Тогда $\angle$CAB+$\angle$CBA=90º, и значит $\angle$ACB=90º.
Поскольку по условию радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 6, то гипотенуза AB=12.

Пусть радиусы окружностей ω_1 и ω_2 равны *R* и *r* соответственно. Пусть $R \geq r$.
Выразим AB через *R* и *r*. Проведем O$_2$D ‖ AB. DA=O$_2$B=*r*, DO$_1$=*R*–*r*.
Рассмотрим прямоугольный треугольник O$_1$DO$_2$ ($\angle$D=90º).
$O_1O_2^2 = O_1D^2+O_2D^2$.
$(R+r)^2 = AB^2 + (R-r)^2$, откуда AB= $2\sqrt{Rr}$.
$2\sqrt{Rr}$ =12, $Rr = 36$. (*)
Четырехугольник O$_1$ABO$_2$ является трапецией с основаниями O$_1$A и O$_2$B и высотой AB.
$S_{O_1ABO_2} = \frac{AO_1 + BO_2}{2} AB = \frac{R+r}{2} \cdot 12 = 6(R+r)$ =78, т.е. $R + r = 13$. (**)
Итак, из (*) и (**) имеем систему уравнений:
$\begin{cases} Rr = 36 \\ R + r = 13 \end{cases}$; откуда, полагая, что $R \geq r$, получаем *R* = 9, *r* = 4.

***Ответ*: 9 и 4**