

Séances 11 et 12
OPTIMISATION SOUS CONTRAINTE

Problème 1

1. On considère la fonction $F(x; y) = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18$ avec $0 \leq x \leq 6$ et $0 \leq y \leq 8$.

Déterminer les coordonnées du point critique de cette fonction et la nature de celui-ci.

2. Une entreprise fabrique des savons et des bougies parfumées en quantités respectives x et y exprimées en tonnes. Le coût total de production z , exprimé en milliers d'euros, est donné par la relation

$$z = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18$$

avec $0 \leq x \leq 6$ et $0 \leq y \leq 8$.

La surface S représentant le coût en fonction de x et y dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est donnée sur la feuille annexe, figure 1.

a. Le point $A(3; 2; 3)$ appartient-il à la surface S ? Justifier.

b. Placer sur la figure 1 le point B d'abscisse 5 et d'ordonnée 2 qui appartient à S .

c. Soit $y = 2$. Exprimer alors z sous la forme $z = f(x)$ puis donner la nature de la section de la surface S par le plan d'équation $y = 2$ en justifiant.

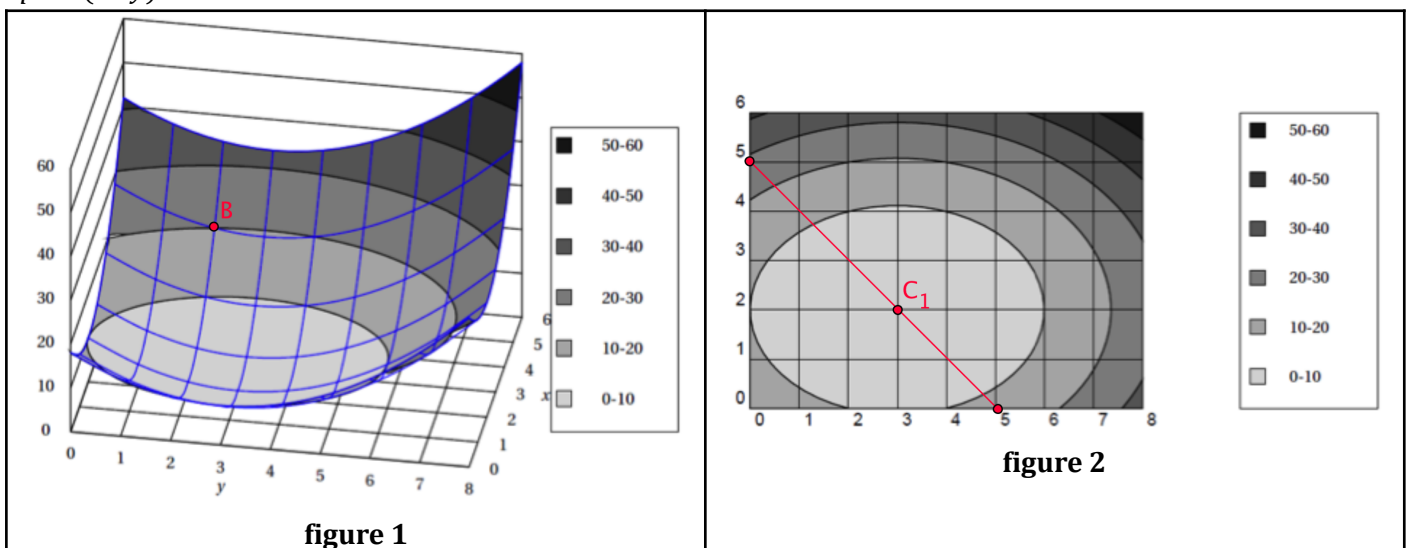
3. La fabrication de x tonnes de savons et de y tonnes des bougies parfumées engendre la contrainte : $x + y = 5$.

a. Quelle est la nature de l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient $x + y = 5$?

b. Vérifier que, sous cette contrainte, z peut s'écrire sous la forme $z = g(x)$ avec $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$.

c. Déterminer la valeur de x pour laquelle g admet un minimum puis la valeur de y et le coût de production z qui correspondent. On note C le point de la surface S qui correspond à ce coût minimum.

d. On donne, sur la feuille annexe 1, figure 2, la projection orthogonale de la surface S sur le plan (xOy) (« vue de dessus de la surface S »). Construire sur cette figure 2 la projection orthogonale sur le plan (xOy) des points dont les coordonnées vérifient $x + y = 5$. Placer sur cette figure 2 le point C_1 projeté orthogonal du point C sur le plan (xOy) .



Solution

1. Soit x et y tels que $0 \leq x \leq 6$ et $0 \leq y \leq 8$

$$\frac{\partial F(x;y)}{\partial x} = 4x - 8 \quad \frac{\partial F(x;y)}{\partial y} = 2y - 6$$

$(x; y; F(x; y))$ est un point critique de F si

$$\frac{\partial F(x;y)}{\partial x} = \frac{\partial F(x;y)}{\partial y} = 0$$

ce qui ne se produit que si $x = 2$ et si $y = 3$

$$\text{Or } F(2; 3) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 3^2 - 6 \times 3 + 18 = 1$$

Donc le seul point critique de cette fonction F a pour coordonnées $(2; 3; 1)$

$$r = \frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x^2} = 4 \quad s = \frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x \partial y} = 0 \quad t = \frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial y^2} = 2$$

$rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ donc **le point critique $(2; 3; 1)$ est un minimum.**

2. a. $F(3; 2) = 2 \times 3^2 - 8 \times 3 + 2^2 - 6 \times 2 + 18 = 4 \neq 3$ donc le point $A(3; 2; 3)$ **n'appartient pas** à la surface S .

b. Je place sur la figure 1 le point B d'abscisse 5 et d'ordonnée 2 qui appartient à S .

c. Soit $y = 2, z = F(x; 2) = 2x^2 - 8x + 2^2 - 6 \times 2 + 18 = 2x^2 - 8x + 10 = f(x)$

La section de la surface S par le plan d'équation $y = 2$ est donc une **parabole**.

3. a. L'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient $x + y = 5$ est un **plan parallèle à $\vec{k}$** .

b. $x + y = 5$ donc $y = 5 - x, z$ peut s'écrire sous la forme

$$z = F(x; 5 - x) = 2x^2 - 8x + (5 - x)^2 - 6 \times (5 - x) + 18 = 2x^2 - 8x + 25 - 10x + x^2 - 30 + 6x + 18 = 3x^2 - 12x + 13$$

c. g admet un minimum en

$$x = \frac{12}{2 \times 3} = 2$$

La valeur de y correspondante est $y = 5 - x = 3$ et le coût de production est donc de

$$z = g(2) = 1 \text{ **millier d'euros**}$$

d. Je construis sur la figure 2 la projection orthogonale sur le plan (xOy) des points dont les coordonnées vérifient $x + y = 5$ puis le point C_1 projeté orthogonal du point C sur le plan (xOy) .

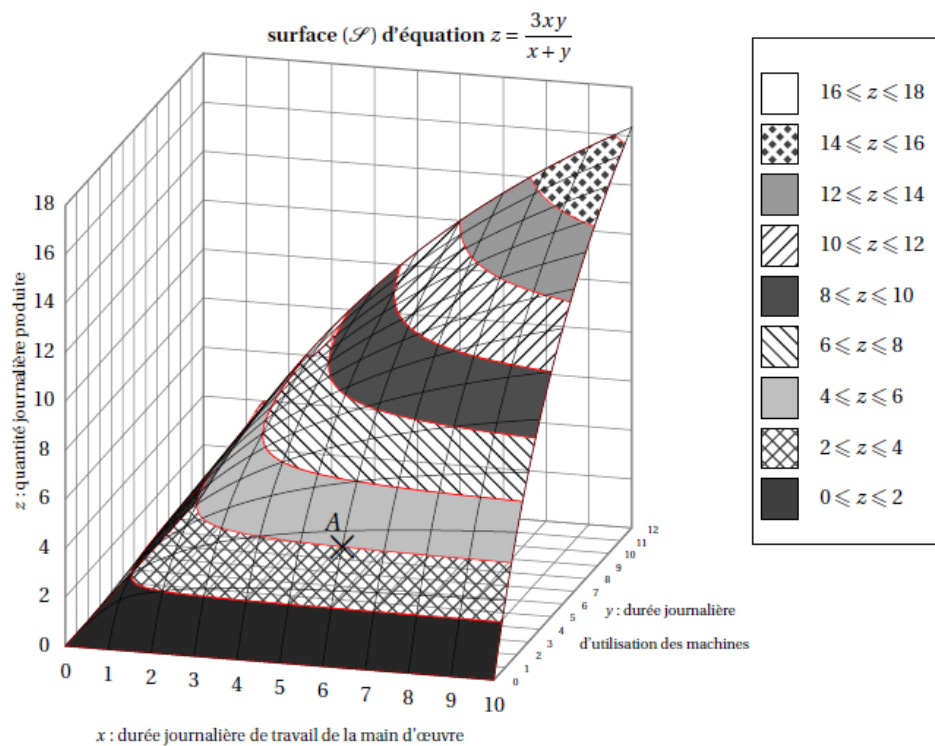
Problème 2

La production journalière d'une entreprise dépend de deux facteurs : le travail de la main d'œuvre et l'utilisation des machines. On désigne par x la durée journalière de travail de la main d'œuvre, exprimée en heures, x appartient à l'intervalle $]0; 10]$, et par y la durée journalière d'utilisation des machines, exprimée en heures, y appartient à l'intervalle $]0; 12]$. La quantité journalière produite (en tonnes) est donnée par la relation

$$f(x; y) = \frac{3xy}{x+y}$$

avec $0 < x \leq 10$ et $0 < y \leq 12$.

La figure ci-dessous représente la surface (S) d'équation $z = f(x; y)$ pour $0 < x \leq 10$ et $0 < y \leq 12$.



Partie 1

Le point A représenté par une croix est un point de la surface ($\mathcal{S}$).

- Déterminer graphiquement l'abscisse et la cote du point A. Calculer son ordonnée (arrondie au dixième).
- Interpréter les résultats obtenus en référence à la production journalière de l'entreprise.

Partie 2

Pour chaque heure, le coût total du travail s'élève à 4 milliers d'euros, et le coût d'utilisation des machines s'élève à 1 millier d'euros. L'entreprise décide de dépenser 36 milliers d'euros par jour et cherche à maximiser sa production journalière sous cette contrainte. On a alors $4x + y = 36$.

La quantité journalière produite (en tonnes) sous cette contrainte de coût peut donc être modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $]0; 10]$ par

$$g(x) = \frac{4x^2 - 36x}{x - 12}$$

- On note g' la fonction dérivée de g sur l'intervalle $]0; 10]$.

a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; 10]$, calculer $g'(x)$ et montrer que

$$g'(x) = \frac{4(x-6)(x-18)}{(x-12)^2}$$

- Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; 10]$.

2. a. En déduire la durée journalière de travail et la durée journalière d'utilisation des machines permettant d'obtenir une production journalière maximale pour un coût total de 36 milliers d'euros.

b. Préciser la quantité journalière maximale produite en tonnes.

Solution

Partie 1

- L'abscisse du point A est 6 et sa cote est 4. Son ordonnée y est donnée par l'équation

$$f(6; y) = 4 \Leftrightarrow \frac{18y}{6+y} = 4 \Leftrightarrow 18y = 24 + 4y, y \neq -6 \Leftrightarrow y = \frac{24}{14} = \frac{12}{7} \approx 1,7$$

- Si l'on fixe la journée de travail de la main d'œuvre à 6h, l'entreprise devra faire fonctionner ses machines pendant 1,7h soit 1h 42min pour fabriquer 4 tonnes.

Partie 2

1. a. Soit $x \in]0; 10]$,

$$g'(x) = \frac{(8x-36)(x-12)-(4x^2-36x)}{(x-12)^2} = \frac{8x^2-96x-36x+432-4x^2+36x}{(x-12)^2} = \frac{4x^2-96x+432}{(x-12)^2}$$

Or,

$$4(x-6)(x-18) = 4(x^2 - 18x - 6x + 108) = 4(x^2 - 24x + 108) = 4x^2 - 96x + 432$$

Donc

$$g'(x) = \frac{4(x-6)(x-18)}{(x-12)^2}$$

b. La fonction g' est positive sur l'intervalle $]0; 6[$, nulle en 6 puis négative sur l'intervalle $]6; 10]$. On en déduit que g est **croissante** sur l'intervalle **$]0; 6[$** puis **décroissante** sur l'intervalle $]6; 10]$: elle admet donc un **maximum** pour $x = 6$.

2. a. La durée journalière de travail et la durée journalière d'utilisation des machines permettant d'obtenir une production journalière maximale pour un coût total de 36 milliers d'euros sont donc respectivement

$$6h \text{ et } 36 - 4 \times 6 = 12h$$

b. La quantité journalière maximale produite est alors de

$$g(6) = \frac{4 \times 6^2 - 36 \times 6}{6 - 12} = \frac{4 \times 6 - 36}{1 - 2} = 12 \text{ tonnes}$$

