Concours Mines-Ponts PC 2012 – Première épreuve de physique.

I – Propagation géométrique de la lumière

1) Milieu **linéaire** : la relation (locale) entre le champ électrique $\vec{E}$ appliqué par l'onde incidente et le vecteur polarisation $\vec{P}$ du milieu est linéaire.

Milieu **homogène** : les propriétés du milieu sont identiques en tout point.

Milieu **transparent** : le milieu n'absorbe pas, du moins dans le visible : la puissance moyenne cédée par l'onde électromagnétique au milieu est nulle.

Milieu **isotrope** : les propriétés du milieu sont les mêmes dans toutes les directions : la relation entre $\vec{E}$ et $\vec{P}$ est de type scalaire.

Dans un tel milieu, les rayons lumineux sont des droites.

2) Lois de Descartes : soit un dioptre plan séparant deux milieux transparents, linéaires et isotropes, le milieu d'incidence étant caractérisé par son indice optique n_1, l'indice de l'autre étant n_2. Alors :

EMBED Word.Picture.8

- le rayon incident, le rayon réfléchi, le rayon réfracté et la normale au dioptre sont contenus dans un même plan.
- le rayon réfléchi est symétrique du rayon incident par rapport à la normale. Si l'on note i_1 l'angle d'incidence = angle entre le rayon incident et la normale, alors l'angle de réflexion = angle entre le rayon réfléchi et la normale est aussi égal à i_1.
- le rayon transmis dans le deuxième milieu (rayon réfracté), s'il existe, est situé de l'autre côté de la normale et l'angle de réfraction i_2 = angle entre le rayon réfracté et la normale vérifie :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \qquad (1)$$

Ces lois datent du XVII^{e} siècle (publiées par Descartes en 1637 sous cette forme). La loi de la réfraction $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ avait été découverte par le Hollandais Snell vers 1620, mais, mort prématurément, il ne l'avait pas publiée …

3) On tire de la loi (1) de la réfraction $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$; mais il faut, pour que le rayon réfracté existe effecti-vement que $\sin i_2 \leq 1$, et donc que $\sin i_1 \leq \frac{n_2}{n_1}$. Cela est toujours vrai, quelque soit i_1, si $n_2 > n_1$ (le rayon réfracté existe alors toujours), mais cela pose problème si $n_2 < n_1$: alors, pour les angles d'incidence i_1 tels que $\sin i_1 > \frac{n_2}{n_1}$, il ne peut y avoir de rayon réfracté : c'est la réflexion totale.

Ce phénomène n'existe donc que dans le cas où $n_2 < n_1$, pour des angles d'incidence $i_1 > \alpha_{\lim}$, où $\alpha_{\lim}$, angle d'incidence limite, vérifie $\sin \alpha_{\lim} = \frac{n_2}{n_1}$.

EMBED Word.Picture.8

4) L'angle α introduit ici est l'angle d'inclinaison du rayon par rapport aux dioptres, il est complémentaire de l'angle d'incidence i : $\alpha = \pi/2 - i$: pour le dioptre n_i / n_{i+1}, la loi de la réfraction $n_i \sin i_i = n_{i+1} \sin i_{i+1}$ exprimée en fonction de α devient $n_i \cos\alpha_i = n_{i+1} \cos\alpha_{i+1}$. Par récurrence immédiate, cette quantité se conserve tout le long du rayon : pour tout $j \neq i$: $n_i \cos\alpha_i = n_j \cos\alpha_j$ (2)

Pour le cas de l'énoncé, la suite n_i étant décroissante, la suite des $\cos\alpha_i$ est elle croissante, et donc la suite des α_i est décroissante : le rayon, en montant, est de moins en moins incliné par rapport à $\overrightarrow{e_x}$.
D'où l'allure du début de la trajectoire du rayon :

EMBED Word.Picture.8

5) L'égalité précédente (2) $n_i \cos\alpha_i = n_j \cos\alpha_j$ devient ici $n(y)\cos[\alpha(y)] = n(0)\cos[\alpha(0)] = C_0$
(3) : c'est la constante d'inclinaison du rayon considéré.

Comme $\cos\alpha(y) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}s$, alors $n(y) = C_0 \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$ (4).

6) Elevons la relation précédente (4) au carré : $(n(y))^2 = C_0^2 \dfrac{(\mathrm{d}s)^2}{(\mathrm{d}x)^2}$; avec $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$, on a donc :

$(n(y))^2 = C_0^2\left[1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]$, soit $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \left(\dfrac{n(y)}{C_0}\right)^2 - 1$.

Dérivons cette dernière relation par rapport à *x* :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{n(y(x))}{C_0}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{n(y(x))}{C_0}\right)^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

par application de la règle de dérivation des fonctions composées : n est fonction de y, elle-même fonction de x pour le rayon considéré.

Après simplification par $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, en général non nul, on obtient : $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\dfrac{n(y)}{C_0}\right)^2 = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(-\dfrac{n^2}{\beta^2}\right)$ (5) si l'on prend $\beta^2 = 2C_0^2$.

Pour une particule de masse *m* se déplaçant dans un référentiel galiléen, en étant soumise uniquement à un potentiel $V(y)$ dépendant seulement de la coordonnée *y*, le principe fondamental de la dynamique se résume à :

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = f_y = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(V(y))$$ (6). Vue de loin, cette relation ressemble vaguement à l'expression (6) … au détail près que dans l'équation mécanique (6), la dérivée seconde de *y* est celle par rapport au temps, tandis qu'elle est par rapport à *x* dans l'équation optique (5) … C'est un peu ennuyeux, d'autant que la composante selon *x* de la vitesse

de la lumière sur le rayon lumineux est $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{n(y)}\cos\alpha(y) = \frac{cC_0}{(n(y))^2}$: il n'existe donc pas de relation homogène entre $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}t$, donc pas de possibilité de remplacement simple de $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ en $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$ dans (5).
Je ne vois pas d'autre analogie …
Dans le cas d'un milieu transparent, linéaire et isotrope, l'indice optique peut être défini en tout point, et, si ce milieu est homogène, n est uniforme : l'équation (5) indique alors que les rayons sont rectilignes, de la même façon que la trajectoire d'une particule plongée dans un potentiel uniforme est rectiligne dans un référentiel galiléen.

7) Si $n^2(y) = n_0^2 + ky^2$, alors l'équation (5) s'écrit sous la forme $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{n(y)}{C_0}\right)^2 = \frac{ky}{C_0^2}$, où, d'après (3), $C_0 = n(0)\cos[\alpha(0)] = n_0\cos\alpha_0$.

L'équation différentielle à résoudre est donc : $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{ky}{C_0^2} = 0$ (7). Deux cas sont à distinguer, selon le signe de *k*.

a) ***k* > 0** : notons alors $k = K^2$, avec $K > 0$.
La solution mathématique de (7) est alors :

EMBED Word.Picture.8

$$y(x) = a\cosh\left(\frac{K}{C_0}x\right) + b\sinh\left(\frac{K}{C_0}x\right) \quad (8)$$

• la condition aux limites $y(x=0) = 0$ donne $a = 0$

• la condition aux limites $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x=0) = \tan\alpha_0$ donne avec (8) $\frac{bK}{C_0} = \frac{bK}{n_0\cos\alpha_0} = \tan\alpha_0 \Rightarrow b = \frac{n_0\sin\alpha_0}{K}$ et donc :

cas où *k* > 0

$$y(x) = \frac{n_0\sin\alpha_0}{K}\sinh\left(\frac{K}{n_0\cos\alpha_0}x\right) \text{ où } K^2 = k$$

b)) ***k* < 0** : notons alors $k = -K^2$, avec $K > 0$.
La solution mathématique de (7) est alors :

EMBED Word.Picture.8

$$y(x) = a\cos\left(\frac{K}{C_0}x\right) + b\sin\left(\frac{K}{C_0}x\right)$$

Les mêmes conditions aux limites donnent cette fois :

$$y(x) = \frac{n_0\sin\alpha_0}{K}\sin\left(\frac{K}{n_0\cos\alpha_0}x\right)$$: le rayon est une sinusoïde d'amplitude $\frac{n_0\sin\alpha_0}{K}$ et de période spatiale $2\pi\frac{n_0\cos\alpha_0}{K}$

cas où *k* < 0 : trajectoires de deux rayons d'inclinaisons initiales différentes

Le cas $k < 0$ correspond à une fibre optique.
Le cas $k > 0$ correspond à un mirage « ordinaire », se produisant quand l'indice optique de l'air **croît** avec l'altitude *y* au voisinage d'un sol chaud : la mise en équations n'est donc valable que pour $y > 0$.

II – Nature ondulatoire de la lumière

II.A – Propagation dans le vide.

8) Équations de Maxwell dans le « vide » :

• Équation de Maxwell-Gauss : $$\mathrm{div}\left(\vec{E}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (9)$$

• Équation de Maxwell-Faraday : $$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E})=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (10)$$

• Équation de conservation du flux magnétique : $$\mathrm{div}\left(\vec{B}\right)=0 \quad (11)$$

• Équation de Maxwell-Ampère : $$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B})=\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \quad (12)$$

• Vecteur de Poynting : $$\vec{\Pi}=\vec{E}\wedge\frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad \text{(en W.m}^{-2}\text{)} \quad (13)$$

• Densité volumique d'énergie électromagnétique : $$u_{em}=\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2}+\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \quad \text{(en J.m}^{-3}\text{)} \quad (14)$$

9) Énoncé du bilan local d'énergie: $$\mathrm{div}(\vec{E}\wedge\frac{\vec{B}}{\mu_0})+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2}+\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right)=-\vec{j}.\vec{E}$$ devient dans le vide vraiment vide où ρ et $\vec{j}$ sont uniformément nuls : $$\mathrm{div}(\vec{E}\wedge\frac{\vec{B}}{\mu_0})+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2}+\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right)=0 \quad (15)$$

Les équations-types de conservation locale sont par exemple :

• équation locale de conservation de la charge : $$\mathrm{div}\left(\vec{j}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \quad (16)$$

• équation locale de conservation de la masse : $$\mathrm{div}\left(\mu\vec{v}\right)+\frac{\partial\mu}{\partial t}=0 \quad (17)$$

(au sein d'un fluide en écoulement, $\vec{v}$ représentant le champ eulérien des vitesses d'écoulement, et μ la masse volumique).

• équation locale de la diffusion particulaire : $$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{j_d}\right)+\frac{\partial c}{\partial t}=\gamma \quad (18)$$

($\overrightarrow{j_d}$ étant le vecteur de densité de courant de diffusion, c la concentration volumique en espèces diffusantes et γ le taux de création volumique en ces espèces, par réaction chimique ou nucléaire : γ est positif en cas de création, négatif si destruction, nul si conservation).

Dans (15), par analogie avec les équations suivantes, on lit donc que $\vec{\Pi}$ est le vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique ; la dénomination de u_{em} est transparente et il y a donc bien conservation de l'énergie électromagnétique dans le vide sans charges ni courants.

On peut écrire (par théorème d'Ostrogradski) la forme intégrale de (15), intégrée sur une surface fermée fixe :

$$\oiint_{(S)}\left(\vec{E}\wedge\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right).\overrightarrow{\mathrm{d}S}=-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{(V)}\left(\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2}+\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right)\mathrm{d}\tau$$

Le flux de $\vec{\Pi}$ à travers une surface (fermée ou pas) correspond à la puissance électromagnétique traversant cette surface : dans le cas d'ondes électromagnétiques comme ici, on peut parler de puissance rayonnée.

10) • de (11) : $\mathrm{div}\left(\vec{B}\right)=0$, on déduit qu'il existe (au moins …) un champ $\vec{A}$ tel que $\vec{B}=\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A})$ (19)

• alors (10) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E})=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})=\vec{0}$: il existe donc (au moins …) un champ scalaire V tel que $\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)\Rightarrow\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$ (20)

Donc $\underline{\vec{\Psi}}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)+jc\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{A}\right)$

Plaçons-nous dans la suite dans le vide vide (ρ et $\vec{j}$ y sont uniformément nuls).

• Effectuons (9) + jc(11) : on obtient $\mathrm{div}\left(\underline{\vec{\Psi}}\right)=0$ (21)

• Effectuons (10) + jc(12) : on obtient $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E})+jc\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B})=\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\underline{\vec{\Psi}}\right)=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+jc\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (22)

Or $\mu_0\varepsilon_0=\frac{1}{c^2}$, et (22) peut se réécrire : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\underline{\vec{\Psi}}\right)=\frac{j}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}+jc\vec{B}\right)=\frac{j}{c}\frac{\partial\underline{\vec{\Psi}}}{\partial t}$ (23)

11) • $\underline{\vec{\Psi}}.\underline{\vec{\Psi}}^*=E^2+c^2B^2=E^2+\frac{B^2}{\mu_0\varepsilon_0}=\frac{2}{\varepsilon_0}u_{em}\Rightarrow u_{em}=\frac{\varepsilon_0}{2}\underline{\vec{\Psi}}.\underline{\vec{\Psi}}^*$ (24)

• $\underline{\vec{\Psi}}^*\wedge\underline{\vec{\Psi}}=\left(\vec{E}-jc\vec{B}\right)\wedge\left(\vec{E}+jc\vec{B}\right)=\vec{E}\wedge\vec{E}+jc\vec{E}\wedge\vec{B}-jc\vec{B}\wedge\vec{E}+c^2\vec{B}\wedge\vec{B}=2jc\vec{E}\wedge\vec{B}$

Donc $\underline{\vec{\Psi}}^*\wedge\underline{\vec{\Psi}}=2jc\mu_0\vec{\Pi}$ ou encore $\vec{\Pi}=\frac{jc\varepsilon_0}{2}\underline{\vec{\Psi}}\wedge\underline{\vec{\Psi}}^*$ (25)

12) A partir de l'équation (23) : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\underline{\vec{\Psi}}\right)=\frac{j}{c}\frac{\partial\underline{\vec{\Psi}}}{\partial t}$, calculons $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\underline{\vec{\Psi}}\right)\right)=\frac{j}{c}\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\underline{\vec{\Psi}}\right)}{\partial t}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{\Psi}}}{\partial t^2}$ (26)

Avec le formulaire, (26) se réécrit : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\underline{\vec{\Psi}}\right)\right)=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\left(\underline{\vec{\Psi}}\right)\right)-\Delta\left(\underline{\vec{\Psi}}\right)=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{\Psi}}}{\partial t^2}$ (27)

Mais par (21), dans le vide, $\mathrm{div}\left(\underline{\vec{\Psi}}\right)=0$ et donc (27) se réduit à : $\Delta\left(\underline{\vec{\Psi}}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{\Psi}}}{\partial t^2}$ (28)

C'est une équation de d'Alembert (spatiale), la vitesse de propagation est c.

• En séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient immédiatement que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ vérifient l'un et l'autre la même équation de d'Alembert.

• Pour l'onde plane progressive et harmonique proposée, on obtient immédiatement la relation de dispersion par l'équation de d'Alembert : $k^2=\frac{\omega^2}{c^2}$, donc $\left\|\overrightarrow{k}\right\|=k=\frac{\omega}{c}$ (30)

• L'expression de la quantité de mouvement n'est pas au programme de la filière PC, mais donnée par l'énoncé : $\overrightarrow{p_\gamma}=\hbar\vec{k}=\frac{\hbar\omega}{c}\vec{u}=\frac{E_\gamma}{c}\vec{u}$ (où $\vec{k}=k\vec{u}$)

13) Ici, le champ électrique est donné en notation complexe. Pour les calculs énergétiques qui suivent, il est plus que prudent de passer en notation réelle, on a alors $\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e_x}$.

• La relation de structure applicable à cette onde plane progressive et harmonique donne

$$\frac{\vec{e_z} \wedge \vec{E}(M,t)}{c} = \vec{B}(M,t) = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz)\vec{e_y} \qquad (31)$$

• Donc $\vec{\Pi}(M,t) = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\vec{e_z} \Rightarrow <\vec{\Pi}> = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\vec{e_z}$ (32)

• Avec (31) $u_{em}(M,t) = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} = \left(\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}\right)\cos^2(\omega t - kz)$; avec $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$, on obtient finalement : $<u_{em}> = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$ (33)

• L'énergie moyenne électromagnétique contenue dans le cylindre de volume $\mathrm{d}S\,\mathrm{d}l$ est donc

$$<\mathrm{d}^2 E_{contenue}> = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\mathrm{d}S\,\mathrm{d}l .$$

• Sur « dt », supposé donc contenir un nombre entier de périodes, l'énergie qui traverse dS se calcule à partir de la puissance moyenne traversant dS, flux du vecteur de Poynting moyen, c'est donc

$$<\vec{\Pi}>.\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\mathrm{d}S = \frac{\varepsilon_0 c}{2}E_0^2\,\mathrm{d}S$$; l'énergie moyenne traversant dS pendant « dt » est donc

$$<\mathrm{d}^2 E_{traversant}> = \frac{\varepsilon_0 c}{2}E_0^2\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$$

• La vitesse moyenne de déplacement de l'énergie étant v_e, elle progresse de $v_e\,\mathrm{d}t$ pendant dt, et donc si l'on choisit $\mathrm{d}l = v_e\,\mathrm{d}t$, toute l'énergie contenue dans le cylindre à la date t aura traversé sa section à l'abscisse z entre t et $t + \mathrm{d}t$. Donc :

$$<\mathrm{d}^2 E_{contenue}> = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\mathrm{d}S\,\mathrm{d}l = \frac{\varepsilon_0 v_e E_0^2}{2}\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t = <\mathrm{d}^2 E_{traversant}> = \frac{\varepsilon_0 c}{2}E_0^2\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t .$$

D'où $v_e = c$

II.B – Propagation dans un diélectrique.

14) Il suffit donc de remplacer la relation de dispersion dans le vide : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \varepsilon_0\mu_0\omega^2$ par $k^2 = n^2\varepsilon_0\mu_0\omega^2 = n^2\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{v_\varphi^2}$. D'où $v_\varphi = \frac{c}{n}$

EMBED Word.Picture.8

15) On se place en un point M à « **l'infini** de O » dans le plan Oxz (la pupille étant de grande taille selon Oy, il n'y a pas de diffraction dans cette direction), dans la direction θ. Pour déterminer le champ électrique en M, ou, plus prudemment, la vibration scalaire, il convient d'appliquer le principe d'Huyghens-Fresnel : la vibration en M sera la somme des vibrations élémentaires diffractées dans cette direction θ par chaque élément de surface (centré sur le

point courant *P*) de la pupille (comme le point *M* est « à l'infini », tous les rayons *PM* peuvent être considérés comme parallèles, du moins au niveau de la pupille.
Ainsi, de la surface élémentaire d*S* centrée sur *P*, le point *M* recevra la vibration $\mathrm{d}s_P(M,t) = aE_0\exp(\omega t - \varphi_P(M))\mathrm{d}S$ où *a* est une constante intrinsèque au principe de Fresnel, E_0 l'amplitude de l'onde plane incidente et $\varphi_P(M)$ la phase en *M* de la vibration diffractée en *P*. On ne peut espérer obtenir la valeur précise de $\varphi_P(M)$, mais on peut évaluer exactement le déphasage en *M* entre la vibration diffractée en *P* et cette diffractée au centre *O* de la pupille : $\varphi_P(M) - \varphi_0(M)$.
Si l'on note *H* le projeté de *O* sur le rayon incident en *P*, *K* le projeté de *P* sur le rayon diffracté vers *M* en *O*, on lit sur la figure ci-dessus que $\varphi_P(M) - \varphi_0(M) = \frac{2\pi}{\lambda}([HP] - [OK])$

Par définition de *H*, $HP = \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{u_{inc}}$ où $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_{inc}} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$ est le vecteur directeur de l'onde incidente. Donc $HP = x\sin\alpha$ et $[HP] = n_1 x\sin\alpha$, chemin optique de *H* à *P* dans le milieu incident d'indice n_1.

De même, $[OK] = n_2 x\sin\theta$ et $\varphi_P(M) - \varphi_0(M) = \frac{2\pi}{\lambda}x(n_1\sin\alpha - n_2\sin\theta)$. Donc :

$$\mathrm{d}s_P(M,t) = aE_0\exp(\omega t - \varphi_P(M))\mathrm{d}S = aE_0\exp(\omega t - \varphi_O(M))\exp(\varphi_O(M) - \varphi_P(M))\mathrm{d}S =$$

$$\mathrm{d}s_P(M,t) = aE_0\exp(\omega t - \varphi_O(M))\exp\left(\frac{2\pi}{\lambda}x(n_1\sin\alpha - n_2\sin\theta)\right)\mathrm{d}S$$

Tous les rayons diffractés *PM* étant cohérents entre eux, il suffit d'intégrer ces $\mathrm{d}s_P(M,t)$ sur toute l'aire de la pupille. L'intégration est classique et on trouve la vibration résultante en *M* :

$$s(M,t) = aLL'E_0\exp(\omega t - \varphi_O(M))\mathrm{Sin_C}\left(\frac{\pi}{\lambda}L(n_1\sin\alpha - n_2\sin\theta)\right)$$ où *L'* est la dimension *Oy* de la pupille.

On calcule l'intensité en *M* par $I(M) = s(M,t)s^*(M,t) = (aLL'E_0)^2\,\mathrm{Sin}_C^2\left(\frac{\pi}{\lambda}L(n_1\sin\alpha - n_2\sin\theta)\right)$. Elle ne dépend que de θ, en , en notant $I_0 = (aLL'E_0)^2$ l'éclairement maximum, on a :

$$I(\theta) = I_0\,\mathrm{Sin}_C^2\left(\frac{\pi}{\lambda}L(n_1\sin\alpha - n_2\sin\theta)\right)$$

L'intensité diffractée sera maximale dans la direction θ qui annule l'argument du sinus cardinal, soit θ tel que $n_1\sin\alpha = n_2\sin\theta$: c'est la direction de l'optique géométrique, précisée par les lois de Descartes.

Dans la limite où $L >> \lambda$, le sinus cardinal deviendra quasi nul pour tout angle ne vérifiant pas cette relation, et la loi de Descartes sera exactement vérifiée : on sait que l'optique géométrique est la limite de l'optique ondulatoire dans le cas où toutes les ouvertures sont très grandes devant la longueur d'onde.

II.C – Propagation de l'onde lumineuse avec un photon de masse non nulle

16) Cf. $\hbar\omega = E_\gamma \Rightarrow [\hbar] = \mathrm{J.s}$; $\left[mc^2\right] = \mathrm{J} \Rightarrow [m_\gamma c] = \mathrm{J.s.m^{-1}}$ et donc $[\delta] = \left[\frac{\hbar}{m_\gamma c}\right] = \mathrm{m}$: δ est une longueur.

17) Avec $\hbar\omega = E_\gamma$ et $\hbar k = p_\gamma$, la relation entre énergie et quantité de mouvement s'écrit :

$$(\hbar\omega)^2 = (\hbar ck)^2 + \left(m_\gamma c^2\right)^2 \Rightarrow k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2 \tag{34}$$

En multipliant (34) par $-\underline{\vec{E}}$, on obtient la relation de dispersion : $-k^2\underline{\vec{E}} = -\omega^2\frac{\underline{\vec{E}}}{c^2} + \frac{\underline{\vec{E}}}{\delta^2}$ (35)

Agissant sur une onde plane, progressive et harmonique, $-k^2\underline{\vec{E}}$ est la signature de $\Delta\left(\underline{\vec{E}}\right)$ et $-\omega^2\underline{\vec{E}}$ est la signature de $\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2}$: on en déduit que la relation (35) provient de l'équation aux dérivées partielles :

$$\Delta\left(\underline{\vec{E}}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} + \frac{\underline{\vec{E}}}{\delta^2} \tag{36}$$

Le champ magnétique doit vérifier la même équation.

18) Sous l'hypothèse [H_1], les équations de Maxwell se réécrivent, dans le vide vide où ρ et $\vec{j}$ sont uniformément nuls:

• Équation de Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\left(\vec{E}\right) = \frac{f}{\varepsilon_0}$ (9a)

• Équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (10)

• Équation de conservation du flux magnétique : $\mathrm{div}\left(\vec{B}\right) = 0$ (11)

• Équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0\left(\vec{F} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$ (12a)

• Voir la question 10) : les relations entre les champs et les potentiels y étaient déduites uniquement des équations (10) et (11), qui sont inchangées dans le cadre de l'hypothèse [H_1] : il n'y a donc pas de contradiction avec l'hypothèse [H_2].

• Pour obtenir l'équation de propagation du champ électrique, prenons le rotationnel de (10) :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E})\right) = -\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{B}\right) = -\mu_0\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

; avec l'expression du double rotationnel :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\left(\vec{E}\right)\right) - \Delta\left(\vec{E}\right) = -\mu_0\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \tag{37}$$

Avec (9a) et réorganisation, (37) se réécrit :

$$\Delta\left(\vec{E}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{f}{\varepsilon_0}\right) \tag{38}$$

Pour arriver à l'équation de Klein-Gordon (36), il faut que $\mu_0\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{f}{\varepsilon_0}\right) = \frac{\vec{E}}{\delta^2} = -\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)\right)$

Pour vérifier cette égalité, il suffit de fixer les conditions de jauge :

$\mu_0\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} = -\frac{1}{\delta^2}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{f}{\varepsilon_0}\right) = -\frac{1}{\delta^2}\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$, on peut choisir $\vec{A} = -\mu_0\delta^2\vec{F}$ et $V = -\frac{\delta^2}{\varepsilon_0}f$, soit finalement $\sigma_1 = -\mu_0\delta^2$ et $\sigma_2 = -\frac{\delta^2}{\varepsilon_0}$

19) L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit maintenant, puisque $\vec{F} = -\frac{\vec{A}}{\mu_0 \delta^2}$: $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = -\frac{\vec{A}}{\delta^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (12b)

Prenons-en la divergence : $\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})\right) = \vec{0} = -\frac{\text{div}\left(\vec{A}\right)}{\delta^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\text{div}\left(\vec{E}\right)$ (39)

Or (9b) : $\text{div}\left(\vec{E}\right) = \frac{f}{\varepsilon_0} = -\frac{V}{\delta^2}$. D'où, dans (39) : $\frac{\text{div}\left(\vec{A}\right)}{\delta^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\text{div}\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{\delta^2 c^2}\frac{\partial V}{\partial t}$, soit :

$$\text{div}\left(\vec{A}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} \quad (40)$$

et $\chi = -\frac{1}{c^2}$ {on retrouve la jauge de Lorenz}

20) Pour les équations de Maxwell vérifiées par le champ $\underline{\vec{\Psi}}$, on procède comme à la question 10) :

• on combine les deux divergences (9b) + *jc*(11) : on obtient $\text{div}\left(\underline{\vec{\Psi}}\right) = -\frac{V}{\delta^2}$ (41)

• on combine les deux rotationnels (10) + *jc*(12b) : on obtient $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\underline{\vec{\Psi}}\right) = \frac{j}{c}\frac{\partial \underline{\vec{\Psi}}}{\partial t} - jc\frac{\vec{A}}{\delta^2}$ (42)

– Équation de propagation de $\underline{\vec{\Psi}}$: prenons le rotationnel de (42) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\underline{\vec{\Psi}}\right)\right) = \frac{j}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\text{rot}}\left(\underline{\vec{\Psi}}\right) - jc\frac{\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{A}\right)}{\delta^2} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\left(\underline{\vec{\Psi}}\right)\right) - \Delta\underline{\vec{\Psi}} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{\Psi}}}{\partial t^2} + \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - jc\frac{\vec{B}}{\delta^2} \quad (43)$$

Avec l'expression (41) de $\text{div}\left(\underline{\vec{\Psi}}\right) = -\frac{V}{\delta^2}$, après réorganisation, (43) donne :

$$\Delta\underline{\vec{\Psi}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{\Psi}}}{\partial t^2} - \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{\delta^2}\overrightarrow{\text{grad}}(V) + jc\frac{\vec{B}}{\delta^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{\Psi}}}{\partial t^2} + \frac{\vec{E} + jc\vec{B}}{\delta^2}$$

Donc $\Delta\underline{\vec{\Psi}} == \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{\Psi}}}{\partial t^2} + \frac{\underline{\vec{\Psi}}}{\delta^2}$: le champ $\underline{\vec{\Psi}}$ obéit à une équation de Klein-Gordon.

– Équation de propagation de $\vec{A}$: réécrivons l'équation (12b) sous la forme :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})\right) = -\frac{\vec{A}}{\delta^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\vec{A}}{\delta^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\left(\vec{A}\right)\right) - \Delta\left(\vec{A}\right) \quad (44)$$

En utilisant (40) : $\text{div}\left(\vec{A}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}$, $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\left(\vec{A}\right)\right)$ se simplifie avec $-\frac{1}{c^2}\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$ et (44) devient encore une équation de Klein-Gordon :

$$\Delta\left(\vec{A}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{\vec{A}}{\delta^2} \quad (45)$$

– Équation de propagation de V : partons de (9b) :

$$\text{div}\left(\vec{E}\right) = -\frac{V}{\delta^2} = -\text{div}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) - \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}(V)\right) \quad (46)$$

En utilisant de nouveau (40), $\text{div}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ et $\text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}(V)\right) = \Delta(V)$, donc (46) donne de nouveau une équation de Klein-Gordon ! $\Delta(V) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{V}{\delta^2}$

21) Comme vu précédemment, la relation de dispersion issue de l'équation de Klein-Gordon vérifiée par tous les champs $\underline{\vec{\Psi}}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{A}$ ou V est donnée par (34) : $k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2$. Donc :

$k^2c^2 = \omega^2 - \left(\frac{m_\gamma c^2}{\hbar}\right)^2 = \omega^2 - \left(\frac{c}{\delta}\right)^2$, de la forme demandée, avec $\omega_p = \frac{m_\gamma c^2}{\hbar} = \frac{c}{\delta}$

22) Tous les champs considérés sont supposés être sous forme d'ondes planes, progressives et harmoniques, de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e_z}$, le terme de propagation étant $\exp\left[j(\omega t - kz)\right]$. Donc, sans restriction, on peut mener les calculs d'analyse vectorielle en utilisant les règles classiques pour ce type d'onde : $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow j\omega$ et $\vec{\nabla} \leftrightarrow -j\vec{k}$

• Ainsi $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \Rightarrow \underline{\vec{B}} = -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{A}} \Rightarrow \underline{\vec{B}} = -j\vec{k} \wedge \left(\vec{A}_{//} + \vec{A}_\perp\right)\exp\left[j(\omega t - kz)\right]$ (47)

Comme $\vec{A}_{//}$ est parallèle à $\vec{k}$, $\vec{k} \wedge \vec{A}_{//} = \vec{0}$ et $\underline{\vec{B}} = -j\vec{k} \wedge \vec{A}_\perp \exp\left[j(\omega t - kz)\right]$ (48)

$\vec{B}$ est donc perpendiculaire à $\vec{k}$, $\vec{B}$ est transverse et $\underline{\vec{B}}_0 = -j\vec{k} \wedge \vec{A}_\perp$

• On peut alors accéder à $\vec{E}$ par (12b) : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = -\frac{\vec{A}}{\delta^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ qui s'écrit dans ces conditions :

$-j\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = -\frac{\vec{A}}{\delta^2} + \frac{1}{c^2} j\omega \underline{\vec{E}}$; avec (48) : $-\vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \underline{\vec{A}}_\perp\right) = -\frac{\vec{A}}{\delta^2} + \frac{1}{c^2} j\omega \underline{\vec{E}} = k^2 \underline{\vec{A}}_\perp - \left(\vec{k}.\underline{\vec{A}}_\perp\right)\vec{k}$ (49)

Par définition, $\vec{k}.\underline{\vec{A}}_\perp$ est nul, donc (49) donne : $j\omega \underline{\vec{E}} = \frac{c^2}{\delta^2}\left(\vec{A}_{//} + \underline{\vec{A}}_\perp\right) + k^2c^2\underline{\vec{A}}_\perp$ (50)

Avec la relation de dispersion, $k^2c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$ et $\omega_p^2 = \frac{c^2}{\delta^2}$, ainsi (50) devient :

$j\omega \underline{\vec{E}} = \omega_p^2 \underline{\vec{A}}_{//} + \omega^2 \underline{\vec{A}}_\perp$, soit, après simplification par $\exp\left[j(\omega t - kz)\right]$ et $j\omega$:

$\underline{\vec{E}}_0 = -j\left(\frac{\omega_p^2}{\omega}\vec{A}_{//} + \omega\vec{A}_\perp\right)$ (51)

Si la masse du photon est non nulle, ω_P est non nulle, et le champ électrique a une composante longitudinale.

23) Pour avoir une onde progressive, il ne faut pas que *k* soit purement imaginaire (on aurait alors affaire à une onde évanescente). Il faut donc $k^2 > 0$, et d'après la relation de dispersion $k^2c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$, il faut alors $\omega > \omega_p = \frac{m_\gamma c^2}{\hbar}$, d'autant plus facile à réaliser que la masse du photon est faible.

Pour fixer les idées, pour que la fréquence correspondante à ω_P soit inférieure par exemple à 1 mHz, il faut que la masse du photon soit inférieure à 7×10^{-54} kg, soit moins de 10^{-23} fois celle de l'électron.

• La vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$, ici, pour $\omega > \omega_p$, $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ et donc $v_\varphi = c\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} > c$.

On retrouve d'ailleurs $v_\varphi \approx c$ pour $\omega >> \omega_p$.

v_φ dépendant de ω, la propagation est dispersive.

• Un paquet d'onde se déplace alors à la vitesse d'ensemble qui est la vitesse de groupe $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$, en général en s'étalant. Un calcul non demandé donne $v_g = c\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega} < c$ (52)

EMBED Word.Picture.8

24) On sait que (si la source est étendue) les franges d'interférences du michelson réglé en lame d'air sont localisées à l'infini, il faut donc placer l'écran au plan focal image de la lentille convergente.
On sait que pour des rayons incidents inclinés d'un angle *i* par rapport à l'axe du bras du michelson, la différence de marche introduite par l'interféromètre est $2e\cos i$, où *e* est l'épaisseur de la lame d'air entre les miroirs.
Les franges obtenues sont alors des franges d'égale inclinaison (même frange, même différence de marche, donc même *i*), sur l'écran, elles apparaissent circulaires, centrées sur le foyer image : une même inclinaison *i* donnera une frange circulaire de rayon *R*, avec $R = f'i$.

L'ordre d'interférence de la frange de rayon *R* est donc $p = \frac{2e}{\lambda}\cos\left(\frac{R}{f'}\right)$.
Lorsqu'on translate le miroir mobile en augmentant *e*, l'ordre d'interférence au centre $p_0 = \frac{2e}{\lambda}$ varie.

• Quand *e* augmente, p_0 augmente, de nouvelles franges apparaissent à partir du centre de l'écran.

• Quand *e* augmente, pour une frange donnée d'ordre $p = \frac{2e}{\lambda}\cos\left(\frac{R}{f'}\right)$ ne varie pas, $\cos\left(\frac{R}{f'}\right)$ doit donc diminuer et donc *R* augmente : les franges s'écartent à partir du centre (et on sait qu'elles sont de plus en plus serrées).

• Lorsque *e* varie de Δe, on voit défiler au centre $N = \Delta p_0 = \frac{2}{\lambda}\Delta e$ franges.

Mais $\lambda(\omega) = \frac{2\pi}{k(\omega)} \Rightarrow \lambda(\omega) = \frac{2\pi c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$, si bien que $N = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\pi c}\Delta e$ (53)

• On peut réaliser un grand nombre de mesures pour un même Δe, mais avec des sources de pulsations différentes (et bien connues …). La relation (53) montre que l'on a alors $\omega^2 = \omega_p^2 + \left(\frac{\pi c}{\Delta e}\right)^2 N^2$ (54)

ω^2 tracé en fonction de N^2 sera une droite, dont l'ordonnée à l'origine fournirait $\omega_p^2 = \left(\frac{m_\gamma c^2}{\square}\right)^2$ donc m_γ

Mais il y a une certaine incertitude ΔN sur le comptage des franges. Pour que cette méthode puisse être exploitable, il faut que l'incertitude sur $\left(\frac{\pi c}{\Delta e}\right)^2 N^2$ qui est $2N\left(\frac{\pi c}{\Delta e}\right)^2 \Delta N$ soit inférieure à ω_p^2 : on a donc intérêt à utiliser le Δe le plus grand possible.

25) Le décalage temporel est dû aux vitesses différentes des deux photons. Les vitesses à prendre en compte sont les vitesses de groupe $v_g = c\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega}$ (52). Comme $\omega >> \omega_p$, on peut effectuer un développement limité :

$$v_g = \frac{c}{\omega}\omega\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right]^{1/2} \cong c\left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right) \quad (55)$$

Donc la vitesse v_{gr} du photon rouge serait inférieure à celle v_{gb} du photon bleu.

Le temps de vol du photon étant $\frac{D}{v_g} \cong \frac{D}{c}\left(1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right)$ (56) (par d.l.) de (55)

On en déduit $\Delta t = \frac{D}{v_{gr}} - \frac{D}{v_{gb}} = \frac{D}{2c}\left(\frac{\omega_p^2}{\omega_r^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega_b^2}\right)$ (57)

Ici, $\omega_b = 2\omega_r$, donc $\Delta t = \frac{3D\omega_p^2}{8c\omega_r^2} = \frac{3D}{8c\omega_r^2}\left(\frac{m_\gamma c^2}{\hbar}\right)^2 \Rightarrow m_\gamma = \frac{\hbar}{c^2}\sqrt{\frac{8c\omega_r^2}{3D}\Delta t}$ (58)

En considérant une année de 365,25 jours de 86400 s, l'année lumière correspond à 9,5 x 10^{15} m.

On en déduit : $m_\gamma \leq$ 8.5 x 10^{-43} kg $\approx \frac{m_{e^-}}{10^{12}}$. Cette masse paraît inusuellement faible, mais elle conduirait à une fréquence de coupure correspondant à ω_p égale à 100 MHz ; or, l'expérience quotidienne d'écoute de stations radio FM à cette fréquence prouve que de telles ondes électromagnétiques se propagent sans problème … m_γ est donc beaucoup plus faible que cela, si elle existe. Il faudrait affiner la mesure de Δt …

Solution proposée par Alain Monange (alain.monange@wanadoo.fr), Lycée Paul Cézanne, Aix-en-Provence