

Exercice 1

Dans un repère cartésien orthonormé $R(O, \overset{\curvearrowright}{i}, \overset{\curvearrowright}{j}, \overset{\curvearrowright}{k})$, on considère un milieu qui subit la déformation suivante :

$$x_1 = X_1 + X_1 X_2, \quad x_2 = X_2 \quad \text{et} \quad x_3 = X_3$$

On désigne par (X_1, X_2, X_3) et (x_1, x_2, x_3) les coordonnées d'une particule avant et après déformation respectivement.

- 1) Calculer le vecteur déplacement $\overset{\curvearrowright}{U}$. Décrire le déplacement des particules de l'axe OX_1 . Même question pour les particules de l'axe OX_2 .
- 2) Déterminer la relation entre un volume final dV et un volume initial dV_0 . Dans quelle région du milieu continu cette transformation n'est pas physique (justifier) ?
- 3) On applique cette déformation à un carré $OABC$ tel que A appartient à l'axe OX_1 et C à l'axe OX_2 ($OA=1$).
 - a) Trouver les équations des segments AB et CB après déformation. Indiquer leurs natures.
 - b) A l'aide du vecteur déplacement, calculer la longueur du segment CB après déformation.
 - c) Donner le schéma du milieu après déformation.
- 4) Maintenant on applique la transformation ci-dessus à un quart de disque, OAB (A appartient à l'axe OX_1 et B à l'axe OX_2), de rayon R_0 et d'épaisseur e selon OX_3 . Calculer le volume final du quart de disque.
- 5) Les particules du quart de disque sont repérées en coordonnées cylindriques par $M_0(R, \Phi, Z)$ avant la déformation et par $M(r, \phi, z)$ après la déformation. On désignera par $B = (\overset{\curvearrowright}{E}_R, \overset{\curvearrowright}{E}_\Phi, \overset{\curvearrowright}{k})$ et $b = (\overset{\curvearrowright}{e}_r, \overset{\curvearrowright}{e}_\phi, \overset{\curvearrowright}{k})$ les bases orthonormées cylindriques associées à M_0 et M respectivement ($\overrightarrow{OM_0} = R\overset{\curvearrowright}{E}_R + Z\overset{\curvearrowright}{k}$ et $\overrightarrow{OM} = r\overset{\curvearrowright}{e}_r + z\overset{\curvearrowright}{k}$). Le milieu continu subit la déformation suivante :

$$r = aR^2, \quad \phi = 2\Phi \quad \text{et} \quad z = aZ^2 \quad (a \text{ étant une constante})$$

- a) Calculer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base B en fonction de R, Φ, Z .
- b) Calculer le tenseur gradient de la déformation F de cette transformation dans la base B .
- c) L'arc AB garde-t-il sa forme circulaire après déformation (justifier) ?

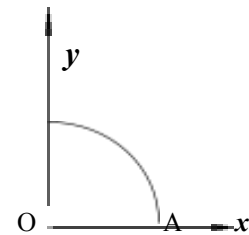
Le gradient d'un vecteur $\overset{\curvearrowright}{V} = V^R \overset{\curvearrowright}{E}_R + V^\Phi \overset{\curvearrowright}{E}_\Phi + V^Z \overset{\curvearrowright}{K}$ dans la base $(\overset{\curvearrowright}{E}_R, \overset{\curvearrowright}{E}_\Phi, \overset{\curvearrowright}{k})$ est donné par:

$$\text{grad}(V) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V^R}{\partial R} & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial V^R}{\partial \Phi} - V^\Phi \right) & \frac{\partial V^R}{\partial Z} \\ \frac{\partial V^\Phi}{\partial R} & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial V^\Phi}{\partial \Phi} + V^R \right) & \frac{\partial V^\Phi}{\partial Z} \\ \frac{\partial V^Z}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial V^Z}{\partial \Phi} & \frac{\partial V^Z}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

Exercice 2

Une plaque OAB appartenant au plan $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$ et ayant la forme d'un quart de disque de rayon R_0 et d'épaisseur e (e est faible) est soumise à des forces telles que le tenseur des contraintes est donné dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ par :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)}$$



Les points du plan $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$ sont repérés par (x, y) en coordonnées cartésiennes et par (r, φ) en coordonnées cylindriques.

- 1) En indiquant pour chaque calcul le vecteur normal $\vec{n}$ utilisé, calculer les forces $\vec{F}_{OA}$, $\vec{F}_{OB}$ et $\vec{F}_{AB}$ qui s'exercent sur les frontières (la surface de la frontière OA est eR_0) du quart de disque et exprimer le résultat dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
- 2) Les forces volumiques sont nulles. La somme des forces appliquées à la plaque est-elle nulle ? Comment expliquer ce résultat ?
- 3) Un nouveau champ de forces avec σ exprimé dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ donne :

$$\sigma = \begin{bmatrix} ax & by \\ by & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$$

- a) Sur la face OB , la résultante des forces est $\vec{F}_{OB} = F_0 \vec{j}$ (F_0 est en N). Exprimer la constante b en fonction de e , R_0 et F_0 .
 - b) Sur l'arc AB , la résultante des forces est parallèle à $\vec{j}$. Exprimer la constante a en fonction de e , R_0 et F_0 . On donne : $\int_0^{\pi/2} (\cos \varphi)^2 d\varphi = \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi)^2 d\varphi = \pi/4$.
- 4) On considère un milieu occupant la région $0 \leq x \leq 2$ et soumis à des contraintes telles que :
- $$\sigma_{11} = x, \sigma_{22} = (x)^2, \sigma_{33} = 0 \quad (\text{les autres composantes sont nulles}).$$
- a) Tracer les cercles de Mohr et déterminer la contrainte normale maximale Tn_{max} . Dans quelles conditions existe-t-il une direction qui donne une contrainte normale $Tn=3$ (donner une condition sur x) ?
 - b) Déterminer la contrainte tangentielle maximale Tt_{max} en fonction de x . Tracer le résultat sur un graphe.
 - c) Un point du milieu étudié perd son élasticité lorsque la contrainte tangentielle Tt dépasse T_0 (T_0 est une caractéristique du matériau). Déterminer, en fonction de T_0 , la région qui va perdre son élasticité.