BACCALAURÉAT BLANC

Mars 2021

MATHÉMATIQUES

Série ES

Durée : 3 heures **Coefficient : 6**

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (6 points)

Partie A

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = 7 + \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$

1. Calculer u_2.

Réponse : On a : $u_2 = 7 + \dfrac{1}{2}u_1$ or $u_1 = 7 + \dfrac{1}{2}u_0 = 7 + \dfrac{6}{2} = 10$, donc $u_2 = 7 + \dfrac{10}{2} = 13$.

2. Parmi les trois algorithmes ci-dessous, lequel permet d'afficher tous les termes de la suite (u_n) jusqu'à un rang N saisi en entrée.

Algorithme 1	**Algorithme 2**	**Algorithme 3**
Saisir N U $\leftarrow$ 6 Pour I de 0 à N Afficher U U $\leftarrow 7+\dfrac{U}{2}$ Fin Pour	Saisir N U $\leftarrow$ 6 Pour I de 0 à N U $\leftarrow 7+\dfrac{U}{2}$ Afficher U Fin Pour	Saisir N U $\leftarrow$ 6 Pour I de 0 à N U $\leftarrow 7+\dfrac{U}{2}$ Fin Pour Afficher U

Réponse : Algorithme n°2.

2. Voici les premières valeurs de la suite (u_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
u_n	6	10	12	13	13,5	13,75	13,88	13,94	13,97	13,98	13,992188	13,996094	13,99805	13,99902

En déduire une conjecture sur le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Réponse : On conjecture que la suite est croissante et qu'elle tend vers 14.

Partie B :

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 14.$

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison q et son premier terme v_0.

Réponse : On a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 14 = 7 + \frac{u_n}{2} - 14 = \frac{u_n}{2} - 7 = \frac{1}{2}(u_n - 14) = \frac{1}{2}v_n.$

Donc la suite (v_n) **est une suite géométrique de raison** $q = \frac{1}{2}$ **et de 1re terme** $v_0 = u_0 - 14 = 6 - 14 = -8.$

2. Monter que, pour tout entier naturel n, $u_n = 14 - 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$

Réponse : Comme (v_n) **est une suite géométrique, on a** $v_n = -8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **et comme** $u_n = v_n + 14,$ alors $u_n = -8\left(\frac{1}{2}\right)^n + 14 = 14 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^n.$

3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

Réponse :

$u_{n+1} - u_n = \left(14 - 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - \left(14 - 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0,$ donc la suite (u_n) est croissante.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Réponse : On a $u_n = 14 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et comme $\lim\limits_{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ alors $\lim\limits_{+\infty} u_n = 14.$

Exercice 2 : (4 points)

*Pour chacune des questions, une seule des trois réponses est exacte. Une réponse exacte rapporte **1 point**. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun* *point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

1. La fonction *f* est définie sur **R** par $f(x)=(-3x+2)e^{x+2}$.

Sa fonction dérivée est :

Réponse : b)

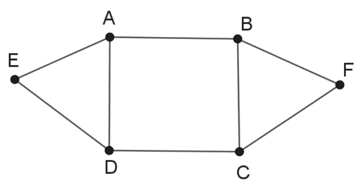
$$f'(x)=-3e^{x+2}+(-3x+2)e^{x+2}$$
$$f'(x)=\left(-3-3x+2\right)e^{x+2}$$
$$f'(x)=\left(-3x-1\right)e^{x+2}$$

2. Le prix d'un article subit deux évolutions successives : une augmentation de 30% suivie d'une diminution de 12%.
Le taux d'évolution moyen du prix arrondi à 10^{-2} près est :

Réponse :

c) $t_m=(1+T_G)^{\frac{1}{2}}-1\approx 0,07$ avec $\mathbf{T_G = CM - 1 = 1,3 \times 0,88 - 1 = 0,144}$

3. Le graphe ci-dessous



Réponse : b) Comme ce graphe possède 6 sommets, il est donc d'ordre 6

4. Le plus petit entier naturel *n* tel que $1-0,5^n \geq 0,99$ est :

Réponse : a) 7

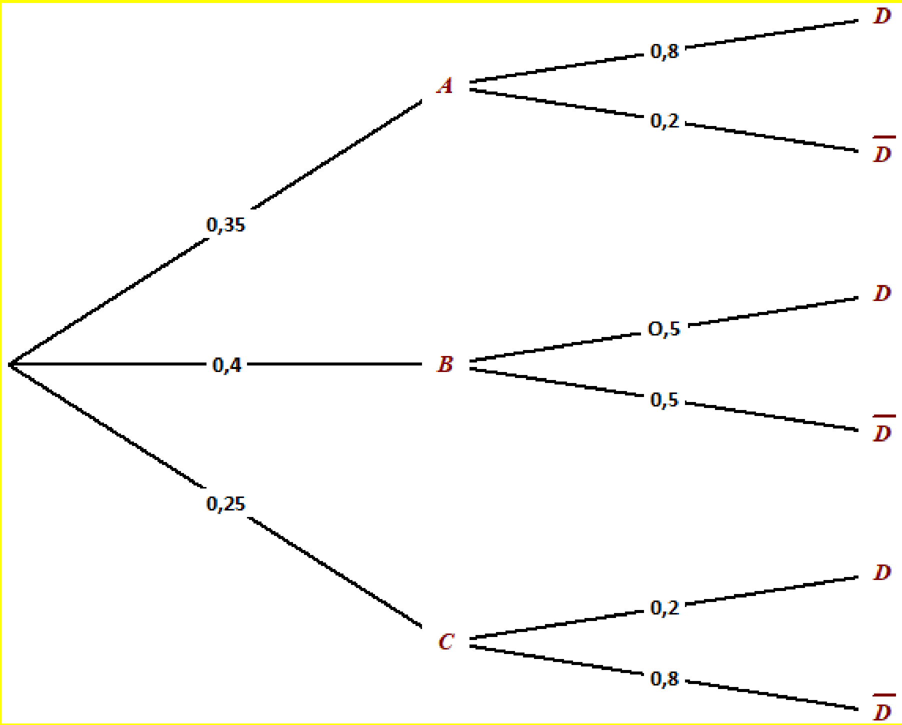
$$\begin{aligned}1-0,5^n \geq 0,99 \quad &\Rightarrow \quad -0,5^n \geq 0,99-1\\ &\Rightarrow -0,5^n \geq -0,01\\ &\Rightarrow 0,5^n \leq 0,01\\ &\Rightarrow \ln(0,5^n) \leq \ln 0,01\\ &\Rightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,5} \quad (\textit{changement d'ordre car } \ln(0,5) \textit{ est négatif})\\ &\Rightarrow n \geq 6,64\end{aligned}$$

Exercice 3 :

Sismo est une chaine de supermarchés possédant trois supermarchés A, B et C dans une ville. Le gérant de la chaine propose un questionnaire de satisfaction à ses clients sur la qualité de services de conseils proposés aux clients.
On s'intéresse ici uniquement aux clients ayant répondu au questionnaire. Parmi ces clients, 35% sont des clients du supermarché A et 40% sont des clients du supermarché B.
La clientèle du supermarché A est satisfaite des services proposés avec une probabilité de 0,8, celle du supermarché B avec une probabilité de 0,5 et celle du supermarché C avec une probabilité de 0,2.
On choisit au hasard un client ayant répondu au questionnaire.
On appelle A, B, C et D les événements suivants :
A : « Le client choisi est un client du supermarché A»
B : « Le client choisi est un client du supermarché B »
C : « Le client choisi est un client du supermarché C »
D : « Le client choisi est un client satisfait »

1. Reproduire et compléter l'arbre pondère suivant traduisant la situation.

Réponse :



2. Traduire par une phrase l'événement $A \cap D$ et calculer $p(A \cap D)$.

Réponse : l'événement $A \cap D$ signifie que le client choisit est du supermarché A et qu'il est satisfait et $p(A \cap D) = 0,35 \times 0,8 = 0,28$.

3. Montrer que la probabilité $p(D) = 0,53$.

Réponse :

$$\begin{aligned} p(D) &= p(A \cap D) + p(B \cap D) + p(C \cap D) \\ &= 0,35 \times 0,8 + 0,4 \times 0,5 + 0,25 \times 0,2 \\ &= 0,53. \end{aligned}$$

4. On choisit un client satisfait de la qualité de services de conseils proposés aux clients. Quelle est la probabilité qu'il soit un client du supermarché C ?

Réponse : $p_D(C) = \dfrac{p(C \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0,5}{0,53} = 0,09.$

Exercice 4 : (6 points)

On considère la fonction *h* définie sur [0 ; + ∞ [par *h* (*x*) = $3x^3 - 4x + 1$.
1. Déterminer la limites de *h* en +∞ .

Réponse : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (3x^3) = +\infty$

2. Calculer la dérivée de *h* et dresser le tableau de variation de *h* .

Réponse : $h'(x) = 9x^2 - 4$ **et sur l'intervalle [0 ; + ∞ [, h'(x) = 0 admet une solution :** $x = \frac{2}{3}$.

D'où :

x	0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{7}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Montrer que l'équation *h*(*x*) =0 admet deux solutions α et β tel α < β. Donner une valeur approchée de α et la valeur exacte de β.

Réponse :

x	0		α		$\frac{2}{3}$		β		$+\infty$
$h'(x)$			$-$		0		$+$		
$h(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{7}{9}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D’après ce tableau de variation, l’équation $h(x) = 0$ admet deux solutions : ✔ ≈ 0,26 et 🚲 = 1.

4. En déduire le tableau de signe sur [0 ; + ∞ [de $h(x)$.

Réponse :

x	0		α		β		+ ∞
$h(x)$		+	0	🎗	0	+	

5. Soit g la fonction définie sur l’intervalle] 0 ; + ∞ [par $g(x) = x^3 - 4x + \ln(x)$.
a) Calculer la limites de g en 0 et en $+\infty$.

Réponse :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}(x^3 - 4x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0}\ln(x) = -\infty\end{array}\right\}\text{Par somme, } \lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}(x^3 - 4x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x) = +\infty\end{array}\right\}\text{Par somme, } \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$

b) Montrer que $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$

Réponse : $g'(x) = 3x^2 - 4 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{3x^3 - 4x + 1}{x} = \dfrac{h(x)}{x}$

c) Donner le tableau de variations de de la fonction g sur l’intervalle] 0 ; + ∞ [.

Réponse :

x	0		α		b		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	$g(b)$	$\nearrow$	$+\infty$

Avec $g(\alpha) \approx$ 🎗 2,37 et $g(\beta) =$ 🎗 3.