Дисциплина: ОД.07 Математика
Занятие № 76 **Группа ТТГ 1/1-9/25** **Дата: 11.02.2026**
Тип занятия: практическое занятие 32 **Преподаватель: Бережная В.А.**
Тема занятия: Тригонометрические неравенства

Цель занятия:
Деятельностная:
– создать условия для применения учащимися методов решения простейших тригонометрических неравенств с тангенсом и котангенсом, а также для освоения приёмов решения более сложных тригонометрических неравенств.
Содержательная:
– актуализировать знания о тригонометрических неравенствах вида $\text{tg}x > a$ и $\text{ctg}x > a$;
– расширить умения учащихся за счёт изучения методов решения неравенств с использованием замены переменной и решения двойных тригонометрических неравенств;
– сформировать практическое умение выбирать и применять подходящий метод (тригонометрическая окружность, метод интервалов, замена переменной) для решения тригонометрических неравенств.
План занятия:
1. Неравенства с тангенсом и котангенсом.
2. Методы решения сложных неравенств.

Ход занятия

Тригонометрические неравенства – это неравенства, содержащие тригонометрические функции, такие как синус, косинус, тангенс и котангенс. Решение таких неравенств заключается в нахождении всех значений переменной, при которых неравенство становится верным, с учётом периодичности тригонометрических функций.

1. Неравенства с тангенсом и котангенсом

Для неравенств вида $\text{tg}x>a$:
1. Решаем уравнение $\text{tg}x=a$: $x_0=\text{arctg}a+\pi n$, $n \in Z$.
2. Определяем знаки тангенса на промежутках между асимптотами.
3. Пишем решение, учитывая период π.

Для неравенств вида $\text{ctg}x>a$ аналогично.

Краткий алгоритм решения тригонометрических неравенств

Рисуем тригонометрический круг;

На оси тригонометрической функции отмечаем значения, удовлетворяющие неравенству;

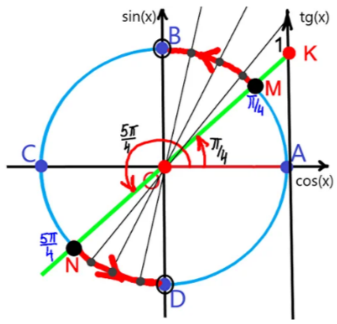
Находим на окружности дуги, соответствующие найденным значениям в предыдущем пункте;

Выписываем найденные дуги в ответ, не забываем про период $2\pi n$. При этом помним, что промежуток всегда записывается против часовой стрелки от меньшего угла к большему. Если же левая граница промежутка получается больше правой, то к правой прибавляем 2π.

В случае неравенств с тангенсом и котангенсом не забываем, что в ответ достаточно выписать только одну (любую) дугу с периодом πn. У тангенса значения π $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ всегда выколотые, а у котангенса 0 и π.

Задачи

Пример 1. tg(x)≥ 1



Здесь нам тоже не обойтись без тригонометрической окружности. Напоминаю, что ось тангенса дублирует ось синусов, параллельна ей и проходит через точку А.

Отметим на оси тангенса значение 1, пусть это будет точка K. Соединим точку K с центром окружности и продлим до пересечения с окружностью в двух точках M и N. По таблице стандартных углов находим:

$$\angle MOA = \frac{\pi}{4}$$

$$\angle NOA = \frac{5\pi}{4}$$

Согласно неравенству, нам нужны значения тангенса больше единицы, то есть любые точки на оси выше точки K.

Какие углы на окружности им соответствуют? Возьмем несколько произвольных точек над K, соединим их с центром и продлим до пересечения с окружностью. Получаются углы, лежащие на дуге MB и дуге ND.

Обратите внимание, что неравенство в примере нестрогое, то есть нас устраивают углы, тангенс от которых равен единице. Поэтому на окружности они показаны закрашенными точками.

И самое главное: точки B и D, соответствующие углам $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, выколотые, так как тангенс не существует от этих углов.

Теперь можем записать ответ, указав найденные дуги MB и ND, и с учетом скобок:

$$x\epsilon[\frac{\pi}{4} + 2\pi\cdot n; \frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot n) \cup [\frac{5\pi}{4} + 2\pi\cdot n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi\cdot n),\ n\in Z$$

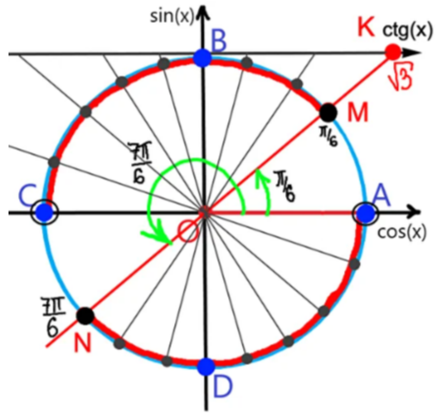
И еще один важный момент. В неравенствах с тангенсом и котангенсом не принято записывать ответ в виде двух промежутков (двух дуг). Если в ответе указать только одну из дуг, неважно какую, и период изменить на πn вместо 2πn, то ответ будет тем же самым:

$$x\epsilon[\frac{\pi}{4} + \pi\cdot n; \frac{\pi}{2} + \pi\cdot n),\ n\in Z$$

Действительно, указав период πn, мы будем покрывать сразу обе дуги на окружности, так как дуги MB и ND отличаются как раз на π. Попробуйте поподставлять различные значения n в ответ, и увидите, что полученные углы лежат на обеих дугах.

Ответ: $x\epsilon[\frac{\pi}{4} + \pi\cdot n; \frac{\pi}{2} + \pi\cdot n),\ n\in Z$

Разберем теперь пример на неравенство с котангенсом.



Пример 2. $ctg(x) \leq \sqrt{3}$

Алгоритм решения аналогичен неравенству с тангенсом:

Рисуем тригонометрическую окружность. Ось котангенса дублирует ось косинуса, параллельна ей и проходит через точку B.

На оси котангенса отмечаем значение $\sqrt{3}$ в точке K. Проведем через точку K и центр O прямую до пересечения с окружностью в точках M и N. Котангенс от углов $\angle MOA = \frac{\pi}{6}$ и $\angle NOA = \frac{7\pi}{6}$ будет равен $\sqrt{3}$.

Согласно неравенству, нам нужны значения котангенса, лежащие слева от $\sqrt{3}$. Отметим несколько произвольных точек на оси котангенсов, чтобы понять какие углы соответствуют нужным значениям котангенса. Видим, что это дуги MC и NA.

Точки M и N отмечены, как закрашенные, так как неравенство нестрогое: нас устраивает, когда котангенс равен $\sqrt{3}$. А точки A и C – выколотые, так как котангенс от 0 и π не существует.

Записываем в ответ любую из найденных дуг с периодом πn, тем самым покрывая сразу обе дуги:

$$x\epsilon[\frac{\pi}{6} + \pi\cdot n; \pi + \pi\cdot n),\ n\in Z$$

2. Методы решения сложных неравенств.

Метод интервалов

Используется при решении неравенств, приводимых к произведению или частному нескольких множителей:

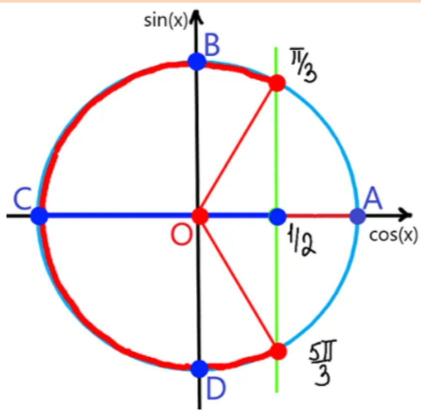
1. Преобразовать неравенство к виду $f(x)\cdot g(x)\geq 0$.
2. Найти нули функций f(x) и g(x).
3. Разбить числовую ось на интервалы и определить знак выражения на каждом из них.
4. Выписать решение, где неравенство выполняется.

Замена переменной в тригонометрических неравенствах

Как решать неравенство, если под тригонометрической функцией стоит не просто x.

Задачи

Пример 3. $cos(4x) \leq \frac{1}{2}$



Сделаем замену, пусть t=4x:

$$cos(t) \leq \frac{1}{2}$$

И решим неравенство относительно переменной t:

$$t\epsilon\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi\cdot n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi\cdot n\right],\ n\in Z$$

Вернемся к исходной переменной x:

$$4x\epsilon\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi\cdot n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi\cdot n\right],\ n\in Z$$

Можно записать это промежуток в виде двойного неравенства:

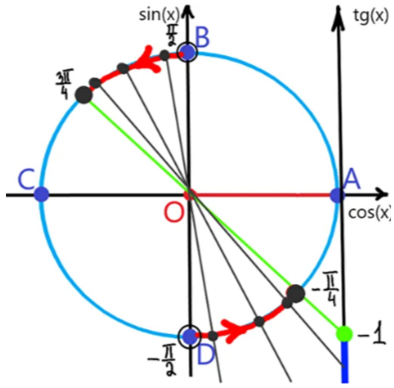
$$\frac{\pi}{3} + 2\pi\cdot n\leq 4x\leq\frac{5\pi}{3} + 2\pi\cdot n;\ n\in Z$$

Чтобы выразить отсюда x, необходимо поделить все двойное неравенство на 4. Будьте внимательны, при делении всего неравенства, делится каждое слагаемое, в том числе и периоды:

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi\cdot n}{2}\leq x\leq\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi\cdot n}{2};\ n\in Z$$

Ответ: $x\epsilon\left[\frac{\pi}{12} + \frac{\pi\cdot n}{2}; \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi\cdot n}{2}\right],\ n\in Z$

Пример 4. $tg\left(\frac{2x+\pi}{3}\right) \leq -1$



Сделаем замену $t = \frac{2x+\pi}{3}$

$$tg(t) \leq -1$$

Решим при поищи окружности:

$$t \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot n; -\frac{\pi}{4} + \pi \cdot n\right], \ n \in Z$$

Обратная замена:

$$\frac{2x+\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot n; -\frac{\pi}{4} + \pi \cdot n\right], \ n \in Z$$

Запишем в виде двойного неравенства:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot n < \frac{2x+\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{4} + \pi \cdot n, \ n \in Z$$

Выразим x. Для этого сначала домножим все двойное неравенство на 3:

$$-\frac{3\pi}{2} + 3\pi \cdot n < 2x + \pi \leq -\frac{3\pi}{4} + 3\pi \cdot n, \ n \in Z$$

Вычтем π из всех частей неравенства:

$$-\frac{3\pi}{2} + 3\pi \cdot n - \pi < 2x \leq -\frac{3\pi}{4} + 3\pi \cdot n - \pi, \ n \in Z$$

Приведем, где возможно, подобные слагаемые:

$$-\frac{5\pi}{2} + 3\pi \cdot n < 2x \leq -\frac{7\pi}{4} + 3\pi \cdot n, \ n \in Z$$

И поделим все неравенство на 2:

$$-\frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi \cdot n}{2} < x \leq -\frac{7\pi}{8} + \frac{3\pi \cdot n}{2}, \ n \in Z$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi \cdot n}{2}; -\frac{7\pi}{8} + \frac{3\pi \cdot n}{2}\right], \ n \in Z$

Двойные тригонометрические неравенства

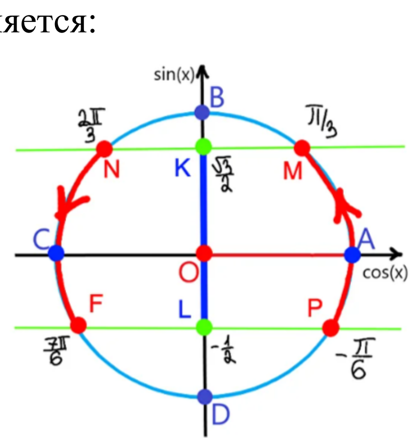
Иногда встречаются двойные тригонометрические неравенства или системы тригонометрических неравенств, что одно и тоже.

Задачи

Пример 5. $-\frac{1}{2} \leq sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Можно переписать в виде системы, смысл при этом сохраняется:

$$\begin{cases} sin(x) \geq -\frac{1}{2} \\ sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



Решим это двойное неравенство, согласно которому нам нужны значения синуса, с одной стороны, больше чем $-\frac{1}{2}$, но меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Нарисуем тригонометрическую окружность, на которой решим оба неравенства по отдельности.

Значения синуса, которые удовлетворяют сразу обоим неравенствам принадлежат отрезку KL на рисунке, и отмечены синей штриховкой. Этим значениям синуса удовлетворяют углы, лежащие на дугах PM и NF. Выпишем их в ответ:

Ответ: $x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot n; \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi \cdot n\right]$, $n \in Z$

(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

1.1. В чём состоит главное отличие в записи общего ответа для неравенств с тангенсом (котангенсом) по сравнению с неравенствами с синусом и косинусом?

1.2. Опишите последовательность действий при решении неравенства tg x ≥ 1 с помощью тригонометрической окружности.

1.3. Чем принципиально отличается расположение оси тангенса и оси котангенса на тригонометрической окружности?

2. Решите предложенные задания по вариантам (письменно):

2.1. Решите неравенства:

А) $sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

Б) $2\, tg^2\, x - 3\, tg\, x + 1 > 0$.

ОТЧЕТНОСТЬ

Работы принимаются до 16 февраля 2026 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание домашней работы вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем, к примеру:

ОД.07 Математика 05.02.25 (Иванов Иван, ТТГ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате: https://t.me/+leGPsDn5EF8yMGIy

С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.