

Câu 1. [2D3-4.12-4] (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$. Đặt $g(x) = 1 + 2 \int_0^x f(t) dt$. Biết $g(x) \geq [f(x)]^3$ với mọi

$x \in [0;1]$. Tích phân $\int_0^1 \sqrt[3]{g(x)}^2 dx$ có giá trị lớn nhất bằng

- A. 4. **B. $\frac{5}{3}$.** C. 5. D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Huyền Trang ; Fb: Nguyen Trang

Chọn B

Gọi $F(t)$ là một nguyên hàm của $f(t)$. Ta có: $\int_0^x f(t) dt = F(t) \Big|_0^x = F(x) - F(0)$.

Vì $y = f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ nên $\int_0^x f(t) dt \geq 0, \forall x \in [0;1]$
 $\Rightarrow g(x) = 1 + 2 \int_0^x f(t) dt > 0, \forall x \in [0;1]$.

Ta có $g(0) = 1, g'(x) = 2 \left(\int_0^x f(t) dt \right)' = 2(F(x) - F(0))' = 2f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{g'(x)}{2}$.

Do $g(x) \geq [f(x)]^3, \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow g(x) \geq \left[\frac{g'(x)}{2} \right]^3, \forall x \in [0;1]$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{g(x)} \geq \frac{g'(x)}{2}, \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt[3]{g(x)}} \leq 2, \forall x \in [0;1] \quad \frac{g'(t)}{\sqrt[3]{g(t)}} \leq 2, \forall t \in [0;1]$
 . Do đó ta có

Suy ra $\forall x \in [0;1], \int_0^x \frac{g'(t)}{\sqrt[3]{g(t)}} dt \leq \int_0^x 2 dt \Leftrightarrow \frac{3}{2} \sqrt[3]{g^2(t)} \Big|_0^x \leq 2x$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} [\sqrt[3]{g^2(x)} - \sqrt[3]{g^2(0)}] \leq 2x \Leftrightarrow \sqrt[3]{g^2(x)} \leq \frac{4}{3}x + 1 \Rightarrow \int_0^1 \sqrt[3]{g^2(x)} dx \leq \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x + 1 \right) dx = \frac{5}{3}$.