

SESIÓN DE APRENDIZAJE 05

Descubrimos la precisión
en el diseño: El conjunto
de los números
irracionales



09/06/26

IE. "JOSÉ GÁLVEZ EGÚSQUIZA"

Adaptada por: Prof. Carlos Guarniz

SESIÓN DE APRENDIZAJE N° 05

I. DATOS INFORMATIVOS

- **Institución Educativa:** I.E. "José Gálvez Egúsqüiza"
- **Ubicación:** Centro Poblado Pichugán, Distrito Chiguirip, Provincia Chota, Región Cajamarca.
- **Grado y Sección:** Quinto Grado de Secundaria, Sección Única.
- **Área Curricular:** Matemática.
- **Docente:** Carlos Guarniz.
- **Duración:** 90 minutos.
- **Unidad de Aprendizaje:** Unidad de Aprendizaje N° 02: *"Aplicamos la matemática para analizar la producción agrícola familiar y diseñar las cometas tradicionales en los fuertes vientos de Pichugán"*.

II. TÍTULO DE LA SESIÓN

"Descubrimos la precisión en el diseño: El conjunto de los números irracionales"

III. PROPÓSITO DE LA SESIÓN

- **Intención Pedagógica:** Lograr que los estudiantes comprendan la insuficiencia de los números racionales para medir ciertas magnitudes continuas y estructuras geométricas reales, identificando a los **números irracionales (I)** como aquellos con decimales infinitos no periódicos. Los estudiantes aprenderán a representarlos de forma exacta en la recta numérica mediante el uso del Teorema de Pitágoras y herramientas de dibujo técnico, valorando la precisión matemática en el diseño estructural.
- **Relación con el Desarrollo de la Competencia:** Esta sesión desarrolla directamente la competencia **"Resuelve problemas de cantidad"**. Se enfoca en que el estudiante transite de las aproximaciones numéricas a la comprensión de la densidad y completitud de la recta real, traduciendo cantidades a expresiones numéricas con números irracionales y comunicando su comprensión sobre las estructuras numéricas.

IV. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- **Diferencia los números irracionales de los racionales**, reconociendo su naturaleza decimal infinita no periódica y su imposibilidad de ser expresados como una fracción exacto/periódica.
- **Representa de manera exacta números irracionales racionales de la forma $\sqrt{n}$ en la recta numérica**, aplicando de forma rigurosa construcciones geométricas basadas en el Teorema de Pitágoras con regla y compás.
- **Justifica la necesidad de utilizar números irracionales** en situaciones de diseño, modelamiento y medición de la realidad comunal (estructuras, terrenos, cometas), evaluando la pertinencia de aproximaciones frente a valores exactos.

V. EVIDENCIA DE APRENDIZAJE

- **El Plano de Diseño Estructural y Recta Real (Individual):** Una lámina técnica donde el estudiante realiza la construcción geométrica consecutiva de la "Espiral de Teodoro" (o construcciones directas de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$) transportadas con compás a la recta numérica, junto con la resolución analítica de problemas de cálculo de diagonales asociadas al diseño de las cometas tradicionales de Pichugán.

VI. INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

- **Lista de Cotejo con Enfoque de Evaluación Formativa:** Diseñada para verificar de forma secuencial los pasos de la construcción geométrica, la correcta aplicación del Teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa irracional, la precisión en el traslado al eje real y la argumentación conceptual de las propiedades de los números irracionales.

VII. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio (20 minutos)

1. **Motivación y Sensibilización:** El docente saluda al aula y muestra una cometa tradicional de Pichugán de estructura cuadrangular. Con una regla escolar, mide los lados del marco cuadrado de la cometa, los cuales miden exactamente 1 metro de cada lado. Luego, coloca una piola (hilo) tensada a lo largo de la diagonal del marco y pregunta: *"Si los lados miden exactamente 1 m, ¿cuánto mide exactamente la caña o carrizo que cruza la diagonal de lado a lado? Si usamos una calculadora o medimos con la regla física, nos dará aproximadamente 1.41 cm o 1.414 cm. ¿Pero existe un número decimal exacto o periódico que multiplique por sí mismo y dé exactamente 2? Si no existe en las fracciones, ¿qué tipo de número es este?"*.
2. **Recuperación de Saberes Previos:** Los estudiantes recuerdan la clasificación de los números racionales (Q): enteros, fracciones, decimales exactos, periódicos puros y mixtos. El docente plantea las preguntas: *¿Qué nos dice el Teorema de Pitágoras sobre un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1?, ¿cómo se despeja el exponente al cuadrado de la ecuación $h^2 = 1^2 + 1^2$?*
3. **Conflicto Cognitivo (Problematización):** Se introduce la interrogante central: *"Si los números racionales llenan la recta numérica porque entre dos fracciones siempre hay infinitas fracciones más... ¿de verdad quedan 'huecos' libres en la recta? Si $\sqrt{2}$ no se puede escribir como fracción, ¿cómo podemos marcar su posición matemática exacta en una línea recta sin cometer errores de redondeo?"*.
4. **Comunicación del Propósito:** El docente escribe en la pizarra: *"Hoy descubriremos el conjunto de los números irracionales a través del análisis de la precisión en el diseño, aprendiendo a ubicarlos de forma exacta en la recta real mediante construcciones geométricas aplicadas a nuestro entorno"*.

Desarrollo (50 minutos)

1. **Familiarización con el Problema:** El docente plantea una situación práctica: Para resistir los fuertes vientos de Pichugán, las cometas necesitan un refuerzo diagonal exacto. Si diseñamos una base rectangular de 2 metros de base y 1 metro de altura, necesitamos hallar la longitud exacta de la caña transversal y ubicar ese valor en una regla de medición continua (recta numérica).
2. **Búsqueda y Ejecución de Estrategias:**
 - o **Modelamiento Matemático:** El docente guía en la pizarra la aplicación del Teorema de Pitágoras: $d^2 = 2^2 + 1^2 \rightarrow d = \sqrt{5}$.
 - o **Construcción Geométrica (Uso de regla y compás):** El docente instruye a los estudiantes a trazar una recta numérica escalada en centímetros grandes (por ejemplo, cada unidad equivale a 5 cm reales en el cuaderno). Sobre el punto 2 de la recta numérica, se levanta un segmento perpendicular de longitud exacta de 1 unidad. Se traza la hipotenusa desde el origen (0) hasta el extremo superior del segmento perpendicular.
 - o **El Traslado Milimétrico:** Utilizando el compás, los estudiantes pinchan en el punto 0, abren el instrumento hasta el extremo de la hipotenusa (cuya longitud matemática es $\sqrt{5}$) y trazan un arco de circunferencia hacia abajo hasta cortar la recta numérica. El punto de corte exacto representa la posición de $\sqrt{5}$ (aproximadamente 2.236...).
3. **Socialización y Representación:** Los estudiantes trabajan en parejas comparando sus arcos de compás. Verifican que la posición de $\sqrt{2}$ cae entre 1 y 2, mientras que $\sqrt{5}$ cae pasando el número 2. Discuten qué sucede si intentaran escribir este número con infinitos decimales en el papel, concluyendo que el símbolo de la raíz o la posición en la recta geométrica es la única forma de tener la magnitud exacta.
4. **Formalización y Reflexión:** El docente formaliza el concepto de **Número Irracional (I)**: aquel número que posee una expresión decimal infinita no periódica. Se explica que la unión de los números racionales (Q) y los irracionales (I) da origen al conjunto de los **Números Reales (R)**, el cual por fin cubre la recta de forma continua (sin huecos). Se presentan otros irracionales famosos como π (3.14159...) asociado a la circunferencia, y ϕ (1.618...), la proporción áurea.

Cierre (20 minutos)

1. **Evaluación y Transferencia:** Los estudiantes resuelven los primeros dos ejercicios de la Ficha de Aprendizaje de forma individual para validar el dominio técnico del compás y del concepto estadístico/numérico del radical.
2. **Metacognición:** Se realiza el cierre reflexivo mediante preguntas dirigidas: *¿Por qué una aproximación decimal como 1.41 no es matemáticamente igual a $\sqrt{2}$?, ¿en qué profesiones de la construcción, ingeniería o diseño artesanal de herramientas creen que un error de milímetros por culpa del redondeo puede estropear un proyecto entero?*

VIII. RECURSOS Y MATERIALES

- **Materiales Educativos:** Pizarra, escuadras de madera para pizarra, compás de madera para pizarra, transportador.
- **Recursos Impresos:** Ficha de aprendizaje conceptual y práctica, hojas de papel técnico o cuadernillos de dibujo, juegos de geometría individuales (regla graduada, escuadra de 90° y compás de precisión).

IX. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

- **Estrategias Inclusivas y Apoyos:** Para los estudiantes que presenten dificultades en la manipulación fina del compás o en el cálculo de raíces cuadradas básicas, se trabajará con papel cuadriculado de cuadrícula grande (1 cm por cuadro). Se les proporcionará una guía visual impresa "paso a paso" coloreada, donde cada paso geométrico (1. Trazar base, 2. Subir perpendicular, 3. Unir diagonal, 4. Bajar compás) tiene un color diferenciado para facilitar la secuenciación del proceso psicomotriz y cognitivo.

X. RETROALIMENTACIÓN

- **Tipo de Retroalimentación: Retroalimentación Descriptiva y Dirigida.**
- **Orientaciones:** Si un estudiante ubica erróneamente un número irracional como $\sqrt{3}$ tomando como base 3 en la recta numérica de forma directa, el docente intervendrá: *“Observemos tu triángulo. Si la base mide 3 unidades y la altura mide 1, por Pitágoras tendríamos $3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10$. La diagonal medirá $\sqrt{10}$. Tu arco bajará cerca del 3.16. Pero nosotros estamos buscando graficar $\sqrt{3}$. ¿Qué valores de catetos más pequeños deberíamos escoger para que la hipotenusa nos dé exactamente $\sqrt{3}$? Recuerda que podemos usar la hipotenusa de la $\sqrt{2}$ que calculamos antes como la nueva base de nuestro siguiente triángulo”.*

XI. BIBLIOGRAFÍA

1. **Ministerio de Educación del Perú (2016).** *Curriculo Nacional de la Educación Básica.* Lima: Minedu.
2. **Ministerio de Educación del Perú.** *Texto Escolar de Matemática de 5° grado de Secundaria.* Lima: Minedu.

FICHA DE APRENDIZAJE: EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Nombres y Apellidos: _____ Grado y Sección: 5°
Secundaria Fecha: _____

Instrucción: Resuelve las siguientes situaciones utilizando instrumentos geométricos de precisión (regla, compás y escuadra). Argumenta tus respuestas utilizando lenguaje formal matemático.

Problema 1

Clasifica los siguientes números indicando si pertenecen al conjunto de los números racionales (Q) o al conjunto de los números irracionales (I). Justifica brevemente tu elección basándote en su representación decimal:

- a) 3.1415
- b) $\sqrt{7}$
- c) -2.3333...
- d) 0.121121112...

Problema 2

Utilizando una regla graduada y un compás de precisión, representa de forma exacta el número irracional $\sqrt{2}$ en la recta numérica provista abajo. Deja visibles todos los trazos auxiliares de la construcción geométrica (catetos e hipotenusa) y señala el punto de intersección exacto.

<---|---|---|---|---|--->
-1 0 1 2 3 4

Problema 3

Para armar la estructura de soporte de una cometa gigante destinada a los vientos de Pichugán, se corta una vara de carrizo que corresponde exactamente a la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 cm y 1 cm.

- Demuestra analíticamente que la longitud de este carrizo es un número irracional.
- Determina entre qué dos números enteros consecutivos de la recta numérica se encuentra dicho valor.

Problema 4

La "**Espiral de Teodoro**" es una estructura geométrica formada por triángulos rectángulos consecutivos donde la hipotenusa del anterior se convierte en el cateto base del siguiente triángulo, manteniendo siempre el cateto perpendicular con una longitud fija de 1 unidad.

- Si el primer triángulo tiene catetos de 1 y 1 (hipotenusa = $\sqrt{2}$), calcula analíticamente la longitud de las hipotenusas de los siguientes tres triángulos consecutivos del patrón geométrico.

Problema 5

Un agricultor de la zona de Chiguirip desea cercar un terreno de cultivo que tiene forma de un cuadrado perfecto cuya área total es de exactamente **12 metros cuadrados**.

- Expresa la longitud exacta de uno de los lados del terreno utilizando radicales.
- Si el agricultor compra alambre utilizando la aproximación decimal de 3.46 m por lado, ¿está comprando más o menos de la dimensión geométrica real del terreno? Justifica analíticamente tu respuesta.

Problema 6

Analiza la veracidad de la siguiente afirmación formulada por un estudiante de quinto de secundaria: *“Si sumamos dos números irracionales cualesquiera, el resultado siempre tendrá que ser otro número irracional, porque los decimales infinitos no periódicos nunca pueden desaparecer”*.

- Demuestra si la afirmación es verdadera o falsa proponiendo un contraejemplo numérico claro utilizando operaciones básicas.

Problema 7

Determina el valor exacto de la diagonal de un rectángulo de base 3 unidades y altura 2 unidades. Posteriormente, detalla paso a paso qué estrategia geométrica deberías ejecutar con tu compás para trasladar ese valor exacto a la recta numérica a partir del origen (0).

Problema 8

El número de oro o **proporción áurea** (ϕ) se define matemáticamente mediante la siguiente expresión real:

$$\phi = (1 + \sqrt{5})/2$$

- Explica detalladamente por qué ϕ es considerado un número irracional. ¿Qué componente de la fórmula arrastra la naturaleza no periódica al resultado final de la operación?

Problema 9

Grafica en una recta numérica limpia el número irracional $\sqrt{10}$ aplicando el Teorema de Pitágoras.

-
- **Pista de diseño:** Selecciona convenientemente dos números enteros como catetos iniciales directos para evitar tener que construir múltiples triángulos intermedios. Escribe la ecuación que valide tu elección de catetos.

Problema 10 (Reto de Diseño Artesanal)

En el taller de carpintería comunal, se está diseñando una mesa ceremonial con un tablero circular de diámetro idéntico a 1 metro. Para calcular el borde protector de la mesa, se aplica la fórmula del perímetro del círculo: $P = \pi * d$.

- Sabiendo que el número pi (π) es un irracional trascendente, explica conceptualmente la diferencia entre decir que el perímetro de la mesa mide **3.1416 metros** frente a decir que mide exactamente π metros. ¿Cómo afecta esta distinción al concepto de "precisión absoluta" en la modelación de objetos del mundo real?