

- Câu 1. [2D3-4.0-4] (Nguyễn Đình Chiêu Tiên Giang)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x) - f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$ với mọi $x \in [0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng
- A.** $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{8}$. **C.** $\frac{\pi}{12}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Tác giả: Lê Quang Việt; Fb: Việt lê quang

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $2f(1-x) - f(x) = \sqrt{1-(1-x)^2}$ với mọi $x \in [0;1]$.

Lại có $2f(x) - f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$ với mọi $x \in [0;1]$.

Suy ra $3f(x) = 2\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-(1-x)^2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{1-(1-x)^2}$.

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{1-(1-x)^2} \right) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

(vì $\int_0^1 \sqrt{1-(1-x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$)

Đặt $x = \sin u \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2} du = \frac{\pi}{4}$.

- Câu 2. [2D3-4.0-4] (NGUYỄN ĐÌNH CHIÊU TIÊN GIANG)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x) - f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$ với mọi $x \in [0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng
- A.** $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{8}$. **C.** $\frac{\pi}{12}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Tác giả: Lê Quang Việt; Fb: Việt lê quang

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $2f(1-x) - f(x) = \sqrt{1-(1-x)^2}$ với mọi $x \in [0;1]$.

Lại có $2f(x) - f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$ với mọi $x \in [0;1]$.

Suy ra $3f(x) = 2\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-(1-x)^2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{1-(1-x)^2}$.

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{1-(1-x)^2} \right) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

(vì $\int_0^1 \sqrt{1-(1-x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$)

$$\text{Đặt } x = \sin u \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2} \, du = \frac{\pi}{4}.$$