Devoir en classe 1

Exercice 1

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degrés Celsius, supposée constante, est notée M. Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton. Pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degrés Celsius et n en minute.

On a ainsi $T_0 = 80$

On modélise la loi de Newton entre 2 minutes consécutives quelconques n et $n + 1$ par l'égalité

$$T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$$

où k est une constante réelle.

Dans ce contexte, on choisit $M = 10$ et $k = -0,2$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a

$$T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$$

1. *D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?*

2. *Montrer que pour tout entier naturel n,*

$$T_{n+1} = 0,8T_n + 2$$

3. On pose, pour tout entier naturel n,

$$u_n = T_n - 10$$

a. *Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.*

b. *Montrer que, pour tout entier naturel n, on a*

$$T_n = 70\times0,8^n + 10$$

c. *De quelle valeur se rapproche la suite (T_n) lorsque n augmente ? Que peut-on en déduire pour le problème posé ?*

Exercice 2

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x-2}{2x+8}$$

1. *Donner l'ensemble de définition D_f de la fonction f.*

2. a. *Calculer les limites en $+\infty$, en $-\infty$ et en -4 (on distinguera les limites à gauche et à droite).*

b. *En déduire que la courbe représentative C_f de f admet deux asymptotes dont on précisera les équations.*

c. *Étudier le signe $f(x) - \frac{1}{2}$ en fonction des valeurs de x et en déduire la position relative de C_f par rapport à son asymptote horizontale.*

3. *Après avoir justifié la dérivabilité de la fonction f sur D_f, calculer f' et en déduire le tableau de variations de la fonction f*

4. *Après avoir complété le tableau de valeurs suivant (arrondir à 0,1 près), tracer la courbe représentative C_f de f dans le repère donné où l'on placera également les asymptotes.*

x	-13	-10	-7	-6	-5	$-4,5$	$-3,5$	-3	-2	-1	**0**	**2**	**6**
$f(x)$													

5. On considère la suite (u_n) définie sur N par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in N,\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Calculer u_1 puis montrer par récurrence que

$$\forall n \in N, -1 < u_{n+1} < u_n$$

Que peut-on en déduire pour la suite ?

6. On considère la suite (v_n) définie sur N par

$$\begin{cases} v_0 = -1 \\ \forall n \in N,\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$$

Calculer v_1 puis en déduire le sens de variations de la suite (v_n).

Question bonus

Trouve les points fixes de f*, c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles* $f(x) = x$