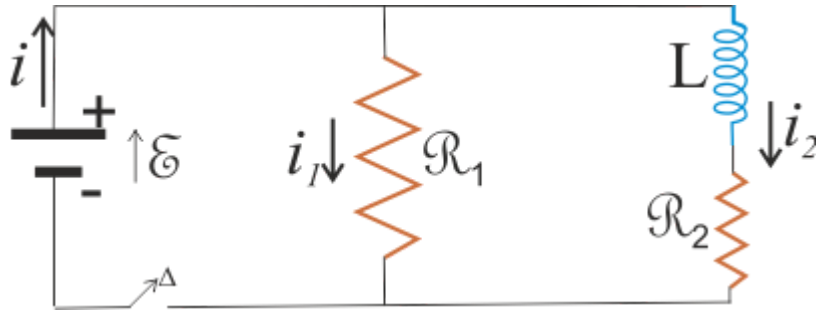


Άσκηση 11

Στο διπλανό κύκλωμα (Σχήμα 1) η μπαταρία είναι ιδανική με $\mathcal{E} = 10V$ και $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $L = 5 H$.

Κάποια στιγμή κλείνουμε το διακόπτη. Αμέσως μετά να υπολογιστούν:



Σχήμα SEQ Σχήμα * ARABIC 1

- 1) Τα i_1 , i_2 , i
- 2) η διαφορά δυναμικού V_2 στα άκρα του αντιστάτη R_2 και η διαφορά δυναμικού V_L στα άκρα του επαγωγέα
- 3) ο ρυθμός μεταβολής di_2 / dt .

Αρκετά αργότερα (από το κλείσιμο) να υπολογιστούν:

- 4) Τα i_1 , i_2 , i
- 5) το V_2 και το V_L
- 6) το di_2 / dt

Απάντηση

- 1) Με το κλείσιμο του διακόπτη ο κλάδος του πηνίου δεν διαρρέεται από ρεύμα, ενώ το ρεύμα στην R_1 αποκαθίσταται ακαριαία. Έτσι:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = \frac{10}{5} = 2 \text{ A} \\ i_2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow i = i_1 + i_2 = 2 \text{ A} \quad (\text{αφ'όπου } i \text{ είναι ο ρεύμας στον κοινό κόμβο των } R_1 \text{ και } R_2)$$

- 2) $V_2 = i_2 R_2 = 0$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα των βρόχων στον μεγάλο βρόχο που περιέχει και το πηνίο.

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = i_2 R_2 \rightarrow \mathcal{E} + \mathcal{E}_L = 0 \rightarrow \mathcal{E}_L = -\mathcal{E} = -10 \text{ V} \rightarrow V_L = -\mathcal{E}_L = 10 \text{ V}$$

- 3) $\mathcal{E}_L = -L \frac{di_2}{dt} \rightarrow \frac{di_2}{dt} = -\frac{\mathcal{E}_L}{L} = \frac{V_L}{L} = 2 \text{ A/s}$

- 4) Αρκετά αργότερα το ρεύμα σταθεροποιείται και στον κλάδο του πηνίου το οποίο συμπεριφέρεται ως αγωγός σύνδεσης. Έτσι:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 = 2 \text{ A} \\ \text{κανόνας κόμβων } E + E_L = i_2 R_2 \xrightarrow{E_L=0} i_2 = \frac{E}{R_2} = \frac{10}{10} = 1 \text{ A} \end{array} \right\} \rightarrow i = i_1 + i_2 = 3 \text{ A} \quad ()$$

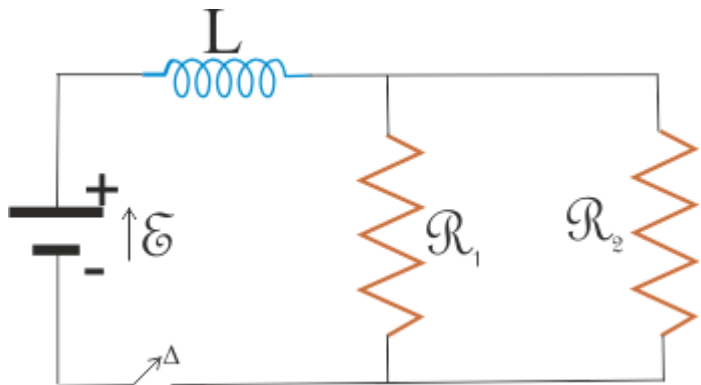
$$\text{ή } i = \frac{E}{R_1 \parallel R_2} = \frac{10}{5 \parallel 10} = \frac{10}{\frac{5 \cdot 10}{15}} = 3 \text{ A}$$

5) $V_2 = i_2 R_2 = 10 \text{ V}$, $E + E_L - i_2 R_2 = 0 \rightarrow E_L = i_2 R_2 - E = 10 - 10 = 0 \rightarrow V_L = 0$

6) $di_2 / dt = -\frac{E_L}{L} = 0$

Άσκηση 12

Στο κύκλωμα (Σχήμα 2) η ιδανική μπαταρία έχει $E = 40 \text{ V}$ και είναι $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$, $L = 50 \text{ mH}$. Κλείνουμε το διακόπτη τη χρονική στιγμή $t = 0$. Να υπολογίσετε την ένταση του ρεύματος διαμέσου της μπαταρίας και το ρυθμό μεταβολής του



- 1) Αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη
- 2) Τη χρονική στιγμή $t = 3 \mu\text{s}$ (όχι για μαθητές)
- 3) Αρκετά αργότερα

Σχήμα SEQ Σχήμα * ARABIC 2

Απάντηση

Σημείωση: Ο επαγωγέας αντιστέκεται στις μεταβολές του ρεύματος που τον διαρρέει. Όταν το ρεύμα σταθεροποιηθεί ο επαγωγέας δρα ως απλό σύρμα σύνδεσης (βραχυκύκλωμα). Στην ωμική αντίσταση (αμελητέα αυτεπαγωγή) το ρεύμα αποκαθίσταται ακαριαία (i το ρεύμα της με $i = i_L$).

- 1) Ο επαγωγέας αντιστέκεται στις μεταβολές του ρεύματος. Έτσι τη στιγμή που κλείνει ο διακόπτης το ρεύμα στο πηνίο που είναι σε σειρά με την πηγή και το συνδυασμό των παράλληλων αντιστάσεων είναι μηδέν. Το πηνίο λειτουργεί ως κομμένο σύρμα και η αναπτυσσόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη είναι αντίθετη της αντίστοιχης της πηγής.

$$i = i_L = i_{\Phi\lambda} = i_2 = 0 \rightarrow \mathbf{E} + \mathbf{E}_L = iR = 0 \rightarrow \mathbf{E}_L = -\mathbf{E}$$

Οι τάσεις στις αντιστάσεις που δεν διαρρέονται από ρεύμα θα είναι μηδέν. Έτσι με εφαρμογή του κανόνα των βρόχων σε έναν που περιλαμβάνουν το πηνίο δίνει

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_L = 0 \rightarrow \mathbf{E} - L \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{\mathbf{E}}{L} = \frac{40}{5 \cdot 10^{-2}} = 8 \cdot 10^2 \text{ A/s}$$

2) Ισχύουν οι $i(t) = \frac{\mathbf{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau})$, $\tau_L = \frac{L}{R}$. Έτσι έχουμε (R η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος)

$$R = R_1 \parallel R_2 = \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} = 10 \text{ k}\Omega, \quad \tau_L = \frac{L}{R} = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{10^4} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 5 \text{ }\mu\text{s}, \quad \frac{t}{\tau_L} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$i(t) = \frac{40}{10^4} (1 - e^{-0,6}) = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,45 = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 1,8 \text{ mA}$$

και

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_L - iR = 0 \rightarrow \mathbf{E} - L \frac{di}{dt} - iR = 0 \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{\mathbf{E} - iR}{L} = \frac{40 - 1,8 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-2}} = \frac{22}{5} 10^2 = 4,4 \cdot 10^2 \text{ A/s}$$

Ή με παραγωγή της συνάρτησης του ρεύματος

$$\frac{d}{dt} i(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\mathbf{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \right] = -\frac{\mathbf{E}}{R} e^{-t/\tau} \left(-\frac{1}{\tau} \right) = \frac{\mathbf{E}}{R \tau} e^{-t/\tau} = \frac{40}{10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} e^{-0,6} = 8 \cdot 10^2 \cdot 0,55 = 4,4 \cdot 10^2 \text{ A/s}$$

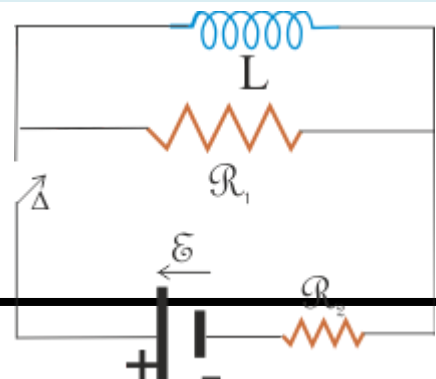
3) Αρκετά αργότερα που έχει αποκατασταθεί το ρεύμα το πηνίο συμπεριφέρεται ως σύρμα σύνδεσης. Άρα:

$$\mathbf{E} - iR = 0 \rightarrow i = \frac{\mathbf{E}}{R} = \frac{\mathbf{E}}{R \parallel R} = \frac{\mathbf{E}}{R/2} = \frac{40}{10^4} = 4 \text{ mA}$$

Το ρεύμα δεν μεταβάλλεται και ο ρυθμός μεταβολής του είναι μηδέν ($\frac{di}{dt} = 0$).

Άσκηση 13

Στο κύκλωμα (Σχήμα 3) η μπαταρία είναι ιδανική με $\mathbf{E} = 12 \text{ V}$ και $R_1 = 10 \text{ }\Omega$, $R_2 = 20 \text{ }\Omega$ και $L = 10 \text{ mH}$. Κλείνουμε το διακόπτη τη χρονική στιγμή $t = 0$. Να υπολογίσετε:



- 1) το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το ρεύμα στον επαγωγέα αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη
- 2) το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το ρεύμα στον επαγωγέα όταν το ρεύμα στην μπαταρία είναι $i = 0,5 \text{ A}$
- 3) το ρεύμα στην μπαταρία όταν το κύκλωμα φτάσει σε σταθερή κατάσταση

Απάντηση

- 1) Τη στιγμή που κλείνει ο διακόπτης ο επαγωγέας δεν διαρρέεται από ρεύμα ($i_L = 0$), λόγω αντίδρασής του (λειτουργεί ως κομμένο σύρμα), ενώ στην αντίσταση R_1 αποκαθίσταται αναριαιία. Έτσι για τον κάτω κλάδο με τις δύο αντιστάσεις το ρεύμα την $t = 0$ θα είναι

$$\mathcal{E} - i(R_1 + R_2) = 0 \rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{12}{30} = 0,4 \text{ A}$$

Στο βρόχο με το πηνίο και την R_1 έχουμε (κανόννας βρόχων, αριστερόστροφη διαγραφφή):

$$V_L - iR_1 = 0 \rightarrow L \frac{di_L}{dt} = iR_1 \rightarrow \frac{di_L}{dt} = i \frac{R_1}{L} = 0,4 \frac{10}{10^{-2}} = 400 \text{ A/s}$$

- 2) Όταν το ρεύμα στην μπαταρία είναι $i = 0,5 \text{ A}$ για τον κάτω βρόχο έχουμε

$$\mathcal{E} - i_1 R_1 - i R_2 = 0 \rightarrow i_1 = \frac{\mathcal{E} - i R_2}{R_1} = \frac{12 - 0,5 \cdot 20}{10} = 0,2 \text{ A} \rightarrow i_L = 0,5 - 0,2 = 0,3 \text{ A}$$

Για τον πάνω (R_1 και πηνίο) βρόχο έχουμε

$$V_L - i_1 R_1 = 0 \rightarrow L \frac{di_L}{dt} = i_1 R_1 \rightarrow \frac{di_L}{dt} = i_1 \frac{R_1}{L} = 0,2 \frac{10}{10^{-2}} = 200 \text{ A/s}$$

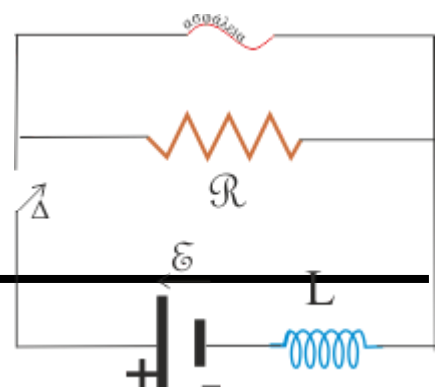
- 3) Όταν το ρεύμα σταθεροποιηθεί το πηνίο λειτουργεί ως σύρμα σύνδεσης που βραχυκυκλώνει την R_1 .

$$\mathcal{E} - i R_2 = 0 \rightarrow i = i_L = \frac{\mathcal{E}}{R_2} = \frac{12}{20} = 0,6 \text{ A}$$

Έτσι: που διατρέχει και το πηνίο, ενώ η R_1 δεν διαρρέεται από ρεύμα (λόγω βραχυκύκλωσης από το σύρμα - πηνίο).

Άσκηση 14

Στο κύκλωμα (Σχήμα 4) είναι $R = 15 \Omega$, $L = 5 \text{ H}$ η ιδανική πηγή έχει $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$ και η ιδανική ασφάλεια στον πάνω κλάδο είναι των 3 A (έχει μηδενική αντίσταση όσο το ρεύμα που τη διαρρέει παραμένει μικρότερη από 3 A , ενώ αν το ρεύμα φτάσει στα 3 A η



ασφάλεια «καίγεται, λιώνει» και στη συνέχεια έχει άπειρη αντίσταση, κομμένο σύρμα). Ο διακόπτης Δ κλείνει τη χρονική στιγμή $t = 0$.

- 1) Ποια χρονική στιγμή καίγεται η ασφάλεια;
- 2) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του ρεύματος i_L που διαρρέει τον επαγωγέα σε συνάρτηση του χρόνου. Να σημειώσετε τη χρονική στιγμή που «καίγεται» η ασφάλεια.

Απάντηση

- 1) Η επαγωγή που βρίσκεται σε σειρά με την πηγή εμποδίζει τη γρήγορη αύξηση του ρεύματος. Η ασφάλεια μέχρι να καεί (η ένταση του ρεύματος να γίνει 3 A) λειτουργεί ως σύρμα σύνδεσης (μηδενικής αντίστασης) και βραχυκυκλώνει την αντίσταση η οποία δεν διαρρέεται από ρεύμα (για όσο χρόνο η ασφάλεια δεν έχει καταστραφεί). Στο βρόχο που περιλαμβάνει την ασφάλεια και την αντίσταση με εφαρμογή του 2ου κανόνα του Kirchhoff, έχουμε (σε κάθε περίπτωση ισχύει $i = i_L$ αφού πηγή και πηνίο διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, καθώς βρίσκονται στον ίδιο κλάδο) :

$$V_{\text{ασφ}} - V_R = 0 \rightarrow i_{\text{ασφ}} \cdot R_{\text{ασφ}} - i_R R = 0 \rightarrow i_{\text{ασφ}} \cdot 0 - i_R R = 0 \rightarrow i_R = 0$$

Για το βρόχο που περιλαμβάνει την πηγή και την ασφάλεια έχουμε:

$$E + E_L - i_{\text{ασφ}} \cdot R_{\text{ασφ}} = 0 \xrightarrow{i_{\text{ασφ}} < 3} E + E_L = 0 \rightarrow E - L \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{E}{L} = \frac{10}{5} = 2\text{ A/s}$$

$$di = \frac{E}{L} dt \rightarrow i(t) = \frac{E}{L} t = 2t, \quad 3 \leq A$$

Δηλ. μέχρι να καεί η ασφάλεια και να «μπει στο παιχνίδι» η αντίσταση το ρεύμα που διατρέχει την πηγή και την ασφάλεια αυξάνεται με σταθερό ρυθμό. Έτσι η χρονική στιγμή που θα καεί η ασφάλεια, ενώ μέχρι

τότε το ρεύμα αυξανόταν με σταθερό ρυθμό (γραμμικά με το χρόνο), θα είναι:

$$t = \frac{3\text{ A}}{2\text{ A/s}} = 1,5\text{ s}$$

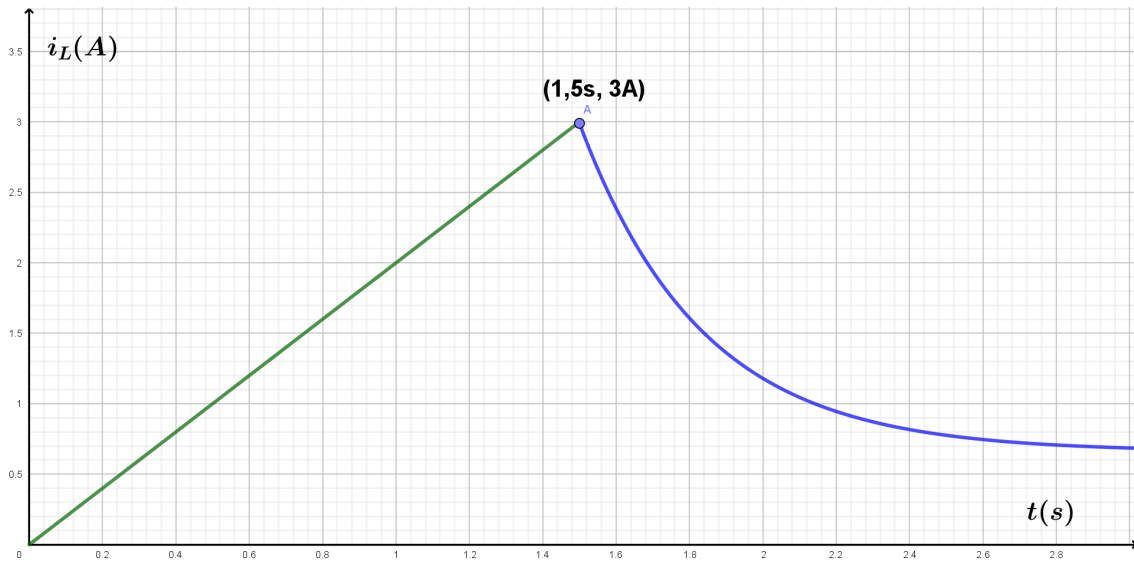
Μέχρι τη στιγμή που καίγεται η ασφάλεια η εξ επαγωγής ηλεκτρεγερτική δύναμη είναι διαρκώς

$$E_L = -E = -L \frac{di}{dt} = -10\text{ V}, \quad \text{ενώ διαρρέεται από γραμμικά αυξανόμενο ρεύμα με τιμή } 3\text{ A} \text{ τη στιγμή } t = 1,5\text{ s}$$

- 2) Από τη στιγμή που θα καεί η ασφάλεια και η R συμμετέχει στο κύκλωμα το ρεύμα θα μειώνεται βαθμιαία (η εξ επαγωγής ηλεκτρεγερτική δύναμη του πηνίου ομόρροπη τώρα της αντίστοιχης της

$$i = \frac{E}{R} = \frac{10}{15} = 0,66\text{ A}$$

πηγής) μέχρι την τελική του τιμή



Σχήμα 5

Όχι για μαθητές

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$, όπως έχει αποδειχτεί, είναι (με τα δεδομένα της άσκησης)

$$\left\{ \begin{array}{l} i(t) = Ce^{\frac{R}{L}(t-1,5)} + \frac{E}{R} = Ce^{-5(t-1,5)} + 0,66, \quad t \geq 1,5 \text{ s} \\ i(1,5) = 3 \rightarrow 3 = C + 0,66 \rightarrow C = 2,33 \end{array} \right\} \rightarrow i(t) = 2,33e^{-5(t-1,5)} + 0,66$$

Έτσι οι κλάδοι της συνάρτησης του ρεύματος σε συνάρτηση του χρόνου θα είναι

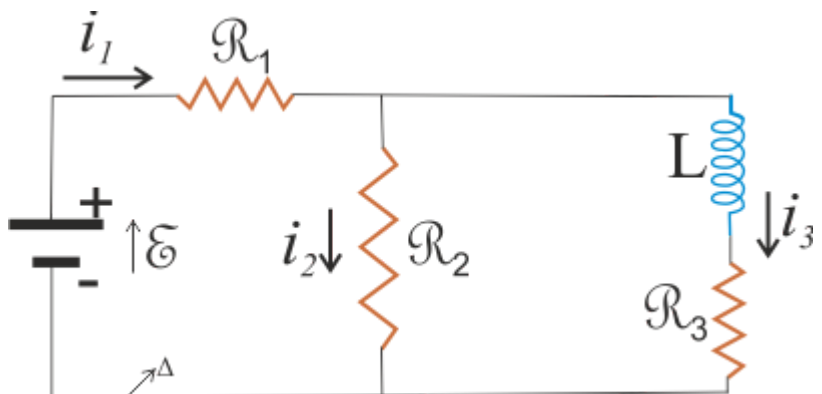
$$i(t) = \begin{cases} Et, & 0 \leq t < 1,5 \text{ s} \\ 2,33e^{-5(t-1,5)} + 0,66, & t \geq 1,5 \text{ s} \end{cases}$$

Άσκηση 15

Στο διπλανό κύκλωμα (Σχήμα 6) η μπαταρία είναι ιδανική με $E = 100 \text{ V}$ και $R_1 = 10 \Omega$

$R_2 = 30 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$, $L = 2 \text{ H}$.

Κλείνουμε το διακόπτη. Αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη να υπολογιστούν:



- 1) Οι εντάσεις i_1, i_2, i_3
- 2) Οι διαφορές δυναμικού V_2, V_3 και V_L στα άκρα του αντιστάτη R_2 , του αντιστάτη R_3 και του επαγωγέα αντιστοίχως
- 3) Ο ρυθμός μεταβολής di_3/dt .

Αρκετά αργότερα από το κλείσιμο του διακόπτη να υπολογιστούν:

- 4) Τα i_1, i_2, i_3
- 5) Τα V_2 και V_L
- 6) το di_3/dt

Στη συνέχεια ανοίγουμε το διακόπτη. Να υπολογισθούν εκείνη τη χρονική στιγμή

- 7) i_1, i_2, i_3
- 8) Η ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη στο πηνίο και με ποια αναλογία αυτή κατανέμεται στις δύο αντιστάσεις μετατρέπόμενη σε θερμική μέχρι να μηδενιστεί και το i_3 .

Απάντηση

- 1) Με το κλείσιμο του διακόπτη, ο κλάδος που περιέχει το πηνίο δεν διαρρέεται από ρεύμα, ενώ το ρεύμα στις R_1 και R_2 αποκαθίσταται ακαριαία. Έτσι:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_3 = 0 \\ i_1 = i_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{100}{40} = 2,5 \text{ A} \end{array} \right\}$$
- 2) $V_2 = i_2 R_2 = 2,5 \cdot 30 = 75 \text{ V}$. Εφόσον $i_3 = 0$ έχουμε $V_3 = i_3 R_3 = 0$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα των βρόχων στον δεξί βρόχο που περιέχει και το πηνίο παίρνουμε: $V_3 + V_L = V_2 \rightarrow V_L = V_2 = 75 \text{ V}$ (το + στην πάνω άκρη του πηνίου).
- 3) $E_L = -L \frac{di_3}{dt} \rightarrow \frac{di_3}{dt} = \frac{V_L}{L} = \frac{75}{2} = 37,5 \text{ A/s}$
- 4) Αρκετά αργότερα τα ρεύματα έχουν σταθεροποιηθεί και το πηνίο συμπεριφέρεται ως αγωγός σύνδεσης. Έτσι:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 = \frac{E}{R_1 + R_2 \parallel R_3} = \frac{100}{10 + 30 \parallel 30} = \frac{100}{10 + 15} = 4 \text{ A} \\ R_2 = R_3 \rightarrow i_2 = i_3 = \frac{i_1}{2} = 2 \text{ A} \end{array} \right\}$$

5) $V_2 = i_2 R_2 = 60 \text{ V}$ (για $i_2 = 3 \text{ A}$)

6) $\frac{d i_3}{d t} = 0$ (για $i_3 = 2 \text{ A}$)

7) Αμέσως με το άνοιγμα του διακόπτη τα i_1, i_2 μηδενίζονται ακαριαία, ενώ το i_3 του πηνίου που δεν το μπορεί αυτό, αφού αντιδρά παράγοντας μια ηλεκτρεγερτική δύναμη ίδιας φοράς (το + στο κάτω άκρο του) με το ρεύμα που μειώνεται, βρίσκει διέξοδο στην R_2 που θα διαρρέεται από ρεύμα αντίθετης φοράς του ρεύματος που διακόπηκε. Έτσι οι δύο αντιστάσεις διαρρέονται από το ίδιο προϋπάρχον ρεύμα του κλάδου με το πηνίο, $i_2' = i_3 = 2 \text{ A}$. Η αποταμιευμένη στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου ενέργεια θα κατανέμεται ανάλογα με την τιμή των αντιστάσεων. Αφού πρόκειται και για ίσες η ενέργεια ισοκατανέμεται.

$$U_L = \frac{1}{2} L i_3^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 4 = 4 \text{ J}$$

$$\frac{Q_2}{Q_3} = \frac{\sum i_3^2 R_2 \Delta t}{\sum i_3^2 R_3 \Delta t} = \frac{R_2}{R_3} = \frac{R_2}{R_3} = c \rightarrow \frac{Q_2}{Q_2 + Q_3} = \frac{c}{c+1} \rightarrow Q_2 = \frac{c}{c+1} Q, Q_3 = \frac{1}{c+1} Q$$

8) $c = 1 \rightarrow Q_2 = \frac{1}{2} Q = \frac{1}{2} U_L = 2 \text{ J}, Q_3 = \frac{1}{2} Q = 2 \text{ J}$

Όχι για μαθητές

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης μετά το άνοιγμα του διακόπτη ($t=0$ η στιγμή που ανοίγουμε το διακόπτη)

$$\begin{aligned} -L \frac{d i_3}{d t} &= i_3 (R_2 + R_3) \rightarrow \frac{d i_3}{i_3} = -\frac{R_2 + R_3}{L} dt = -15 dt \rightarrow \\ \ln i_3 &= -15 t + C \rightarrow i_3 = C' e^{-15 t} \xrightarrow{t=0: i_3=2} i_3(t) = 2 e^{-15 t} \end{aligned}$$