



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 1

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4. Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

P1.- Queremos contratar una empresa de gestión de entre las siguientes:

- La empresa A nos cobra 150 € de coste base, y adicionalmente 5 € por cada cliente y 3 € por cada factura que emite.

- La empresa B nos cobra 300 € de coste base, 10 € por cada cliente y no cobra por emitir facturas.

- La empresa C nos cobra 100 € de coste base, no cobra en función del número de clientes, pero cobra 5 € por cada factura que emite.

a) Si el año pasado tuvimos 50 clientes y, en total, emitimos 180 facturas, ¿qué empresa nos hubiese costado menos contratar? (3 pt)

Resolución

El coste de la empresa A es $C_A = 150 + 5.50 + 3.180 = 940$ €

El coste de la empresa B es $C_B = 300 + 10.50 = 800$ €

El coste de la empresa C es $C_C = 100 + 5.180 = 1000$ €

La empresa que menos cuesta contratar es la B

De cara al año que viene, tenemos una previsión de x clientes e y facturas. Con esta previsión, la empresa A nos costaría 1050 € y la empresa B nos costaría 900 €.

b) Calcula el número de clientes x y el número de facturas y previstos. (5 pt)

Resolución

El coste de la empresa B es $C_B = 300 + 10x = 900$

El coste de la empresa A es $C_A = 150 + 5x + 3y = 1050$

Queda el sistema $\{ 300 + 10x = 900 \Rightarrow x = 60$
 $5x + 3y = 900$. Sustituyendo, $5.60 + 3y = 900 \Rightarrow y = 200$

La previsión es de 60 clientes y 200 facturas

c) Con x clientes e y facturas, ¿cuánto nos costaría la empresa C? (2 pt)

Resolución

El coste de la empresa C es $C_C = 100 + 0x + 5y = 100 + 5y$

Con la previsión de 60 clientes y 200 facturas nos costaría $100 + 5.200 = 1100$ €

P2.- Un camión transporta una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen y como máximo un peso de 18 toneladas. Puede transportar:

- Arena, que pesa 1,6 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 80 € por metro cúbico.
- Gravilla, que pesa 1,8 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 100 € por metro cúbico.
- Ceniza, que pesa 0,5 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 25 € por metro cúbico.

Nos interesa calcular el precio más alto que podrá facturar en un viaje. Para hacerlo, se pide:

a) Plantea la maximización de este precio como un problema de programación lineal en dos variables.

(4 pt)

b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 pt)

c) Calcula el número de toneladas de cada material que se tienen que transportar para alcanzar el precio máximo y determina también dicho precio máximo. (2 pt)

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	metros cúbicos	toneladas	precio (en €)
arena	x	1,6x	80x
gravilla	y	1,8y	100y
ceniza	12 - x - y	0,5(12 - x - y)	25(12 - x - y)
total	12	1,1x + 1,3y + 6	55x + 75y + 300

La función a optimizar (maximizar) es el precio $f(x, y) = 55x + 75y + 300$

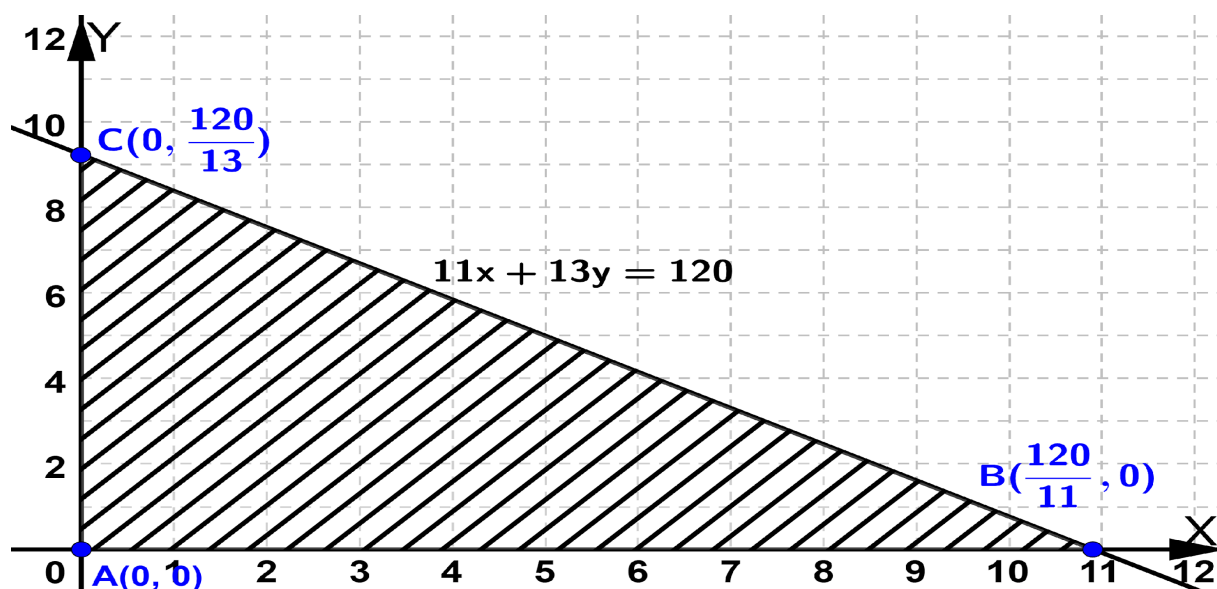
Las restricciones son

$$\{1, 1x + 1,3y + 6 \leq 18 \mid x \geq 0, y \geq 0\} \Rightarrow \{1, 1x + 1,3y \leq 12 \mid x \geq 0, y \geq 0\} \Rightarrow \{11x + 13y \leq 120 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$$

Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$11x + 13y \leq 120 \rightarrow \text{Recta: } 11x + 13y = 120$ $x = 0, \quad 11 \cdot 0 + 13y = 120, \quad y = \frac{120}{13} \cong 9,23$ $y = 0, \quad 11x + 13 \cdot 0 = 120, \quad x = \frac{120}{11} \cong 10,91$		$x \geq 0 \rightarrow x = 0$ (eje Y) $(1, 0) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (1, 0).						
<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>0</td><td>$\frac{120}{11}$</td></tr> <tr> <td>y</td><td>$\frac{120}{13}$</td><td>0</td></tr> </table>		x	0	$\frac{120}{11}$	y	$\frac{120}{13}$	0	$y \geq 0 \rightarrow y = 0$ (eje X) $(0, 1) \rightarrow 1 \geq 0$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 1).
x	0	$\frac{120}{11}$						
y	$\frac{120}{13}$	0						
$(0, 0) \rightarrow 11x + 13y \leq 120$ (cierto). La solución es el semiplano cerrado que contiene al (0, 0).								

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Veamos en qué vértice, $A(0, 0)$, $B\left(\frac{120}{11}, 0\right)$ ó $C\left(0, \frac{120}{13}\right)$ alcanza el valor máximo el precio $f(x, y) = 500x + 400y$

$$f(A) = f(0, 0) = 55 \cdot 0 + 75 \cdot 0 + 300 = 300 \quad f(B) = f\left(\frac{120}{11}, 0\right) = 55 \cdot \frac{120}{11} + 75 \cdot 0 + 300 = 900$$

$$f(C) = f\left(0, \frac{120}{13}\right) = 55 \cdot 0 + 75 \cdot \frac{120}{13} + 300 = \frac{12900}{13} \cong 992,31$$

Luego, el precio máximo es 992,31 € y se alcanza en el vértice $C\left(0, \frac{120}{13}\right)$, $x = 0$, $y = \frac{120}{13}$

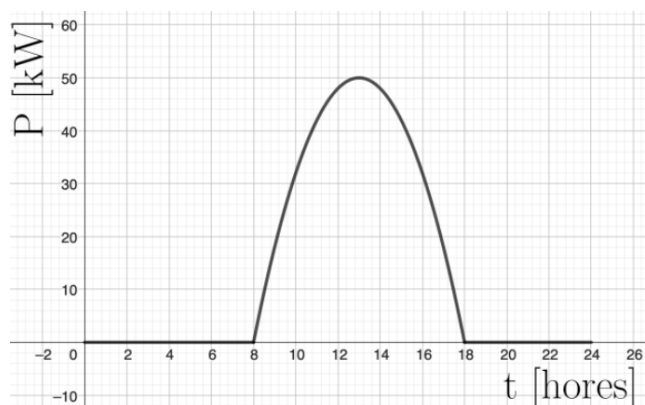
$$\text{arena: } 1,6x = 1,6 \cdot 0 = 0 \text{ toneladas} \quad \text{gravilla: } 1,8y = 1,8 \cdot \frac{120}{13} \cong 16,62 \text{ toneladas}$$

$$\text{ceniza: } 0,5(12 - x - y) = 0,5\left(12 - 0 - \frac{120}{13}\right) = 6 - 0,5 \cdot \frac{120}{13} \cong 1,38 \text{ toneladas}$$

P3.- La potencia generada por una placa solar, P (medida en kW), depende del tiempo transcurrido, t (medido en horas), según la siguiente expresión:

$$P(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < 8 \\ -2t^2 + 52t + c, & \text{para } 8 \leq t < 18 \\ 0, & \text{para } 18 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

donde c es un parámetro real.



a) Teniendo en cuenta que la función es continua, ¿cuál es el valor del parámetro c ? (3 pt)

Resolución

Para $t \neq 8$, $t \neq 18$, P es continua por ser el resultado de operar con funciones continuas.

P es continua en $t = 8$, $P(t) = P(t) \Rightarrow 0 = -2 \cdot 8^2 + 52 \cdot 8 + c \Rightarrow 0 = 288 + c \Rightarrow c = -288$

P es continua en $t = 18$, $P(t) = P(t) \Rightarrow -2 \cdot 18^2 + 52 \cdot 18 + c \Rightarrow 288 + c = 0 \Rightarrow c = -288$

Luego, f es continua en $c = -288$ y

$$P(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < 8 \\ -2t^2 + 52t - 288, & \text{para } 8 \leq t < 18 \\ 0, & \text{para } 18 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

b) Teniendo en cuenta que el valor máximo se alcanza a las 13 horas, calcula con la expresión dada cuál es la potencia en ese momento. (3 pt)

Resolución Piden $P(13) = -2 \cdot 13^2 + 52 \cdot 13 - 288 = 50 \text{ kW}$

c) ¿En qué intervalos la función es creciente? ¿En qué intervalos es decreciente? (4 pt)

Resolución P(t) es creciente de 8 h a 13 h y decreciente de 13 h a 18 h

P4.- Consideremos el peso de un adulto, p (en kg), y su metabolismo basal, m (en vatios). Un investigador proporciona el modelo siguiente: $p(m) = 0,1m^{1,5}$, $m \in (0, +\infty)$

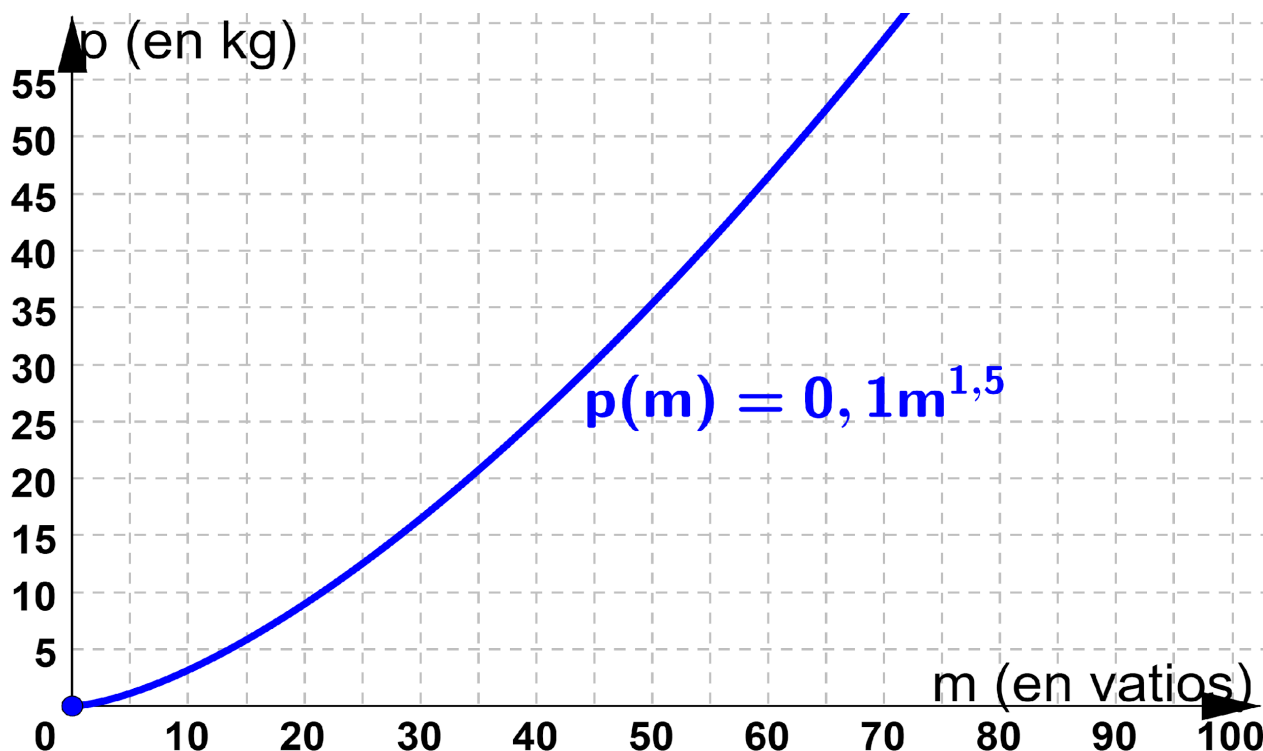
a) Haz un gráfico esquemático de la función p(m), indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales. (7 pt)

Resolución

Claramente el dominio es $(0, +\infty)$; $p(0) = 0,1 \cdot 0^{1,5} = 0$; $p(m) = 0,1 \cdot (+\infty)^{1,5} = +\infty$

$p'(m) = 0,1 \cdot 1,5 \cdot m^{0,5} = 0,15m^{0,5} > 0$. Luego, p(m) es creciente en $(0, +\infty)$

El gráfico esquemático sería



b) Encuentra la función que da el metabolismo basal en función del peso, m(p) (es decir, aísla la variable m) (3 pt)

Resolución

Como $p = 0,1m^{1,5} \Rightarrow m^{1,5} = m^{3/2} = \frac{p}{0,1} = 10p \Rightarrow m = \sqrt[3]{100p^2}$

Luego, la función que da el metabolismo en función del peso es $m(p) = \sqrt[3]{100p^2}$, $p \in (0, +\infty)$

P5.- Considera las funciones: $f(x) = (x+2)^3$, $g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$

a) Justifica, calculando, que $f'(x) = g'(x)$ (4 pt)

Resolución $f'(x) = 3(x+2)^2 = 3(x^2 + 4x + 4) = 3x^2 + 12x + 12 = g'(x)$

b) ¿Es cierto que $f(x) = g(x)$? (3 pt)

Resolución

Desarrollando, $f(x) = (x+2)(x+2)^2 = (x+2)(x^2 + 4x + 4) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \neq g(x)$

c) Calcula $\frac{f(x)}{g(x)}$ (3 pt)

Resolución

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^3 + 6x^2 + 12x} = \frac{x^3/x^3 + 6x^2/x^3 + 12x/x^3 + 8/x^3}{x^3/x^3 + 6x^2/x^3 + 12x/x^3} = \frac{1 + 6/x + 12/x^2 + 8/x^3}{1 + 6/x + 12/x^2} = 1$$

P6.- Manel escoge al azar dos cifras entre 0 y 9, que pueden estar repetidas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cifras sean múltiplo de tres? (3 pt)

Resolución

Por la regla de Laplace, la probabilidad de que la cifra elegida sea múltiplo de 3 es $\frac{4}{10} = 0,4$

Como las cifras se eligen de manera independiente, la probabilidad que se pide es $0,4 \cdot 0,4 = 0,16 = 16\%$

b) El producto de las dos cifras es múltiplo de tres si lo es al menos una de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las dos cifras sea múltiplo de tres? (4 pt)

Resolución

Como la probabilidad de no elegir una cifra que sea múltiplo de 3 es $\frac{6}{10} = 0,6$, entonces la probabilidad de que ninguna cifra sea múltiplo de 3 es $0,6 \cdot 0,6 = 0,36$.

Por tanto, la probabilidad que se pide es $p(\text{alguna cifra sea múltiplo de 3}) = 1 - 0,36 = 0,64 = 64\%$

Ahora, Pep te da su número de teléfono, que contiene nueve cifras también entre 0 y 9, posiblemente repetidas, y que supondremos que son cifras escogidas al azar.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las nueve cifras sea múltiplo de tres? (3 pt)

Resolución

Como el producto de las nueve cifras es múltiplo de tres si lo es alguna de ellas, la probabilidad que se pide es $1 - 0,6^9 = 1 - 0,01 = 0,99 = 99\%$

P7.- De un total de $n = 80$ alumnos, el 80% de los alumnos han aprobado un examen de matemáticas, y el 75% han aprobado un examen de física. Además, de los que han suspendido el examen de matemáticas, solo un 50% ha aprobado el de física.

a) De los que han suspendido el examen de física, ¿Cuántos han aprobado el de matemáticas? (4 pt)

b) ¿Cuántos alumnos han aprobado alguno de los dos exámenes? (3 pt)

c) ¿Aprobar el examen de física y aprobar el examen de matemáticas son sucesos independientes? (3 pt)

Resolución

M = aprobar el examen de matemáticas, F = aprobar el examen de física.

Elaboramos la siguiente tabla de contingencia:

	M	M ^c	Total
F	$60 - 8 = 52$	$50\% \text{ de } 16 = 8$	$75\% \text{ de } 80 = 60$
F ^c	$20 - 8 = 12$	$16 - 8 = 8$	$80 - 60 = 20$
Total	$80\% \text{ de } 80 = 64$	$80 - 64 = 16$	80

a) De 20 alumnos que han suspendido física, 12 han aprobado matemáticas

b) Aprueban algún examen = aprueban mates + aprueban física - aprueban mates y física =
 $= 64 + 60 - 52 = 72$ alumnos

c) $p(F) \cdot p(M) = 0,75 \cdot 0,8 = 0,6 \neq p(F \cap M) = 0,65 \Rightarrow F$ y M son dependientes.

P8.- Para estudiar la vida de las tortugas marinas, hemos recopilado la edad que alcanzaron algunos ejemplares que murieron por causas naturales, y hemos obtenido (en años):

x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	$\bar{x}$
55	62	69	70	72	77	94	103	75,25

Suponiendo que estos datos siguen una distribución normal, y que su desviación típica poblacional es de $\sigma = 20$ años.

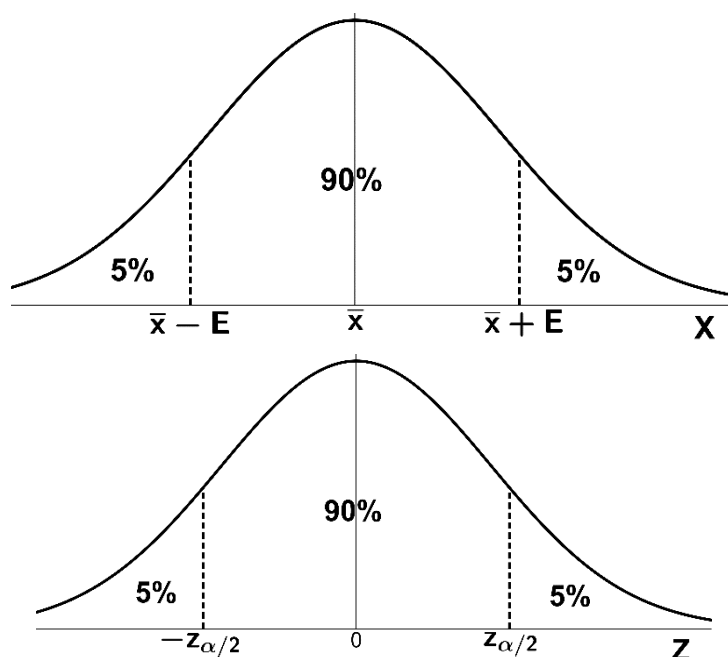
a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional con el 90% de confianza. (4 pt)

Resolución

Sea la v.a. $X =$ edad, en años, $X \rightarrow N(\mu; 20)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza 90% para estimar el tiempo medio, μ , es $I_c = (\bar{x} - E, \bar{x} + E)$, siendo $\bar{x} = 75,25$ la media de la muestra de

tamaño $n = 8$ y $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

Como el área bajo la campana es 100%, entonces $100\% - 90\% = 10\%$ y $10\% : 2 = 5\%$



$z_{\alpha/2}$ es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = 90\% + 5\% = 95\% = 0,95$

Esta probabilidad coincide con $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,9}{2} = 0,95$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,95$ usando la tabla de la $N(0, 1)$, por interpolación $\rightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$.

Sustituyendo,

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{20}{\sqrt{8}} \cong 11,63 \quad , \quad I_c = (75,25 - 11,63 ; 75,25 + 11,63) = (63,62 ; 86,88).$$

Supongamos ahora, además, que la media poblacional es de $\mu = 75,25$.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida? (3 pt)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida, pero no los 100 años de vida? (3 pt)

Resolución

$$X = \text{edad} \rightarrow N(75,25 ; 20) \Rightarrow Z = \frac{X - 75,25}{20} \rightarrow N(0, 1).$$

$$b) p(X > 80) = p\left(\frac{X - 75,25}{20} > \frac{80 - 75,25}{20}\right) \cong p(Z > 0,24) = 1 - p(Z \leq 0,24) = 1 - 0,5948 = 40,52\%$$

$$c) p(80 < X \leq 100) = p\left(\frac{80 - 75,25}{20} < \frac{X - 75,25}{20} \leq \frac{100 - 75,25}{20}\right) \cong p(0,24 < Z \leq 1,24) =$$

$$= p(Z \leq 1,24) - p(Z < 0,24) = 0,8925 - 0,5948 = 0,2977 = 29,77\%.$$