01.09.2022

Тема: Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми і добутку. Перестановки, розміщення, комбінації

Посилання на підручник: https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-11-klas-2019/13-matematyka-11-klas/merzlyak-ag-matematyka-algebra-i-poch-analizu-ta-geometriya-riven-standartu-11-kl.pdf

Матеріали до теми:

1. Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми й добутку.

(Згадати поняття множини, елементів множини)

Скінченна упорядкована множина – така множина, для якої визначений порядок розміщення її елементів.

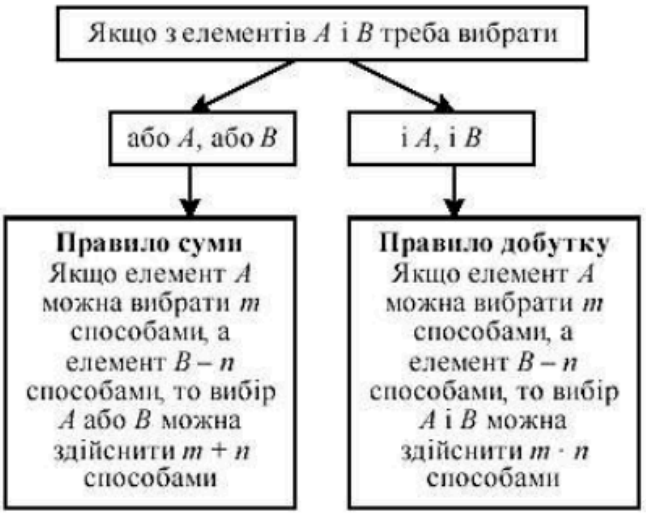
Комбінаторика – розділ математики присвячений розв'язанню задач про вибір і розміщення елементів скінченої множини, відповідно до заданих правил.

Ці правила визначають спосіб побудови деякої конструкції – комбінаторної сполуки.

В основі класичної комбінаторики лежать *комбінаторні правила суми та добутку.*

Наприклад (правило суми) – на тарілці лежать 5 яблук і 9 груш. Один плід можна обрати 5+9=14 (способами).

Вибір правила комбінаторного додавання і комбінаторного множення



Наприклад (правило добутку) – із 6 видів конвертів без марок і 5 марок один конверт і одну марку можна вибрати $6 \cdot 5 = 30$(способами).

*Вправа 1.*У групі 15 хлопців і 12 дівчат. Скількома способами можна вибрати :

1) хлопця;
2) дівчину;
3) одного студента цієї групи;
4) двох студентів – хлопця й дівчину.

Розв'язання

1) Хлопця можна вибрати 15 способами;
2) дівчину можна вибрати 12 способами;
3) за правилом суми або дівчину або хлопця можна вибрати 15+12 =27 способами;
4) за правилом добутку вибрати двох студентів - хлопця й дівчину – можна 15·12=180 способами.

Відповідь: 1)15; 2)12; 3) 27;4) 180 способами.

Вправа 2. Скількома способами можна пошити триколірний прапор, якщо є тканини 5 різних кольорів?

Розв'язання

Перший колір можна вибрати п'ятьма способами, другий – чотирма, третій – трьома. За правилом добутку триколірний прапор можна зшити 5·4·3=60 способами.

Відповідь: 60.

2. *Перестановки, розміщення ,комбінації.*

Означення. ***Факторіалом*** називають добуток n послідовних натуральних чисел

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) = n!(n - \text{факторіал}).\ 0!=1,\ 1!=1.$$

Наприклад, 5!=1·2·3·4·5=120, 2!=1·2=2, 4!=1·2·3·4=24.

Означення. ***Перестановкою з n елементів*** називають будь-яку впорядковану множину з n елементів.

$P_n = n!$ - формула числа перестановок без повторень

В даній формулі кожен елемент, що входить у комбінацію поданий у єдиному екземплярі.

Повернемося до задачі, яку ми розглядали на початку заняття.

✓ Скільки п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 1,2,3,4,5, якщо цифри в числі не повторюються?

Отже, кількість таких чисел дорівнює $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Означення. ***Розміщенням з n елементів по k*** називають будь-яку впорядковану множину з k елементів n- елементної множини.

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ - формула числа розміщень без повторень

Розглянемо задачу. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 1,2,3,4,5 за умови, що цифри не повторюються.

Отже, маємо розміщення з 5 по 3 елементи: $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

Означення. ***Комбінацією без повторень з n елементів по k*** називають будь-яку k- елементну підмножину n – елементної множини.

$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ формула числа комбінацій без повторень

Розглянемо задачу. Скількома способами можна вибрати дві різні цифри із цифр 1,2,3,4,5?

У цій задачі не має значення порядок розміщення двох цифр, які вибираємо із даних п'яти цифр, тобто способів вибору цифр буде $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$.

Під час розв'язування комбінаторних задач зручно користуватися схемою:

Вибір формули для обчислення кількості сполук



Вправа 1. Скількома способами можна скласти список із 6 учнів?

Оскільки порядок розміщення елементів враховується і всі елементи входять до сполуки, то $P_6 = 6! = 720.$ (способами).

Відповідь: 720 способами.

Вправа 2. Скількома способами можна розмістити 8 осіб за столом, біля якого стоїть 8 стільців?

Розв'язання

Оскільки порядок розміщення елементів враховується і всі елементи входять до сполуки, то $P_8 = 8! = 403320$ (способами)

Відповідь: 403320 способами.

Вправа 3. Скільки існує трицифрових чисел, у яких всі цифри непарні й різні.

Розв'язання

Усього непарних цифр 5. Оскільки порядок враховується й до сполуки входять не всі цифри, а тільки три, то таких чисел буде. $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60.$

Відповідь: 60.

Вправа 4. Скільки існує трицифрових чисел, у яких всі цифри парні й різні.

Розв'язання

Усього парних цифр 5. Тоді можна скласти трицифрових чисел усього A_5^3 , але серед них будуть і ті ,що мають нуль на першому місці. Таких «неправильних чисел» буде A_4^2. Отже, чисел, що нас цікавлять, буде $A_5^3 - A_4^2 = \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = \frac{5!-4!}{2!} = \frac{120-24}{2} = \frac{96}{2} = 48.$

Відповідь: 48.

Вправа 5. Із 3 яблук і 7 бананів треба приготувати десерт із 5 фруктів, у який входило б хоча б одне яблуко. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання

1) Скількома способами можна приготувати десерт із 1 яблука і 4 бананів? Яке правило слід застосувати? (Правило добутку)

$$C_3^1 C_7^4 = 3\frac{7!}{4!\,(7-4)!} = 105 \text{ сп.}$$

2) Скількома способами можна приготувати десерт із 2 яблук і 3 бананів?

$$C_3^2 C_7^3 = \frac{3!}{2!(3-2)!}\frac{7!}{3!(7-3)!} = 105 \text{ сп.}$$

3) Скількома способами можна приготувати десерт із 3 яблук і 2 бананів?

$$C_3^3 C_7^2 = 1\frac{7!}{2!\,(7-2)!} = 21 \text{ сп.}$$

---

4) Скількома способами можна приготувати даний десерт? Яке правило при цьому слід застосувати?

105+105+21=231 (сп.)

Відповідь: 231 спосіб.

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал §3, п.12-13.
2. Законспектувати основні означення, формули.
3. Виконати вправи: 12.1, 12.4, 12.7, 12.9, 13.1, 13.4, 13.6, 13.8.
4. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

https://www.youtube.com/watch?v=NORqFoG5pW0

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net , у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net