

2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

ΘΕΜΑ Β

1. (13177) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι : $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι : $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$. (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1. (Μονάδες 9)

2. (14071) α) Η αλγεβρική παράσταση K , που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1, πάνω στον άξονα είναι:

A. $K = |x+1| + |x-2|$ B. $K = |x-1| + |x+2|$ Γ. $K = (|x|+1) + (|x|-2)$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

β) Αν είναι $K = |x+1| + |x-2|$ τότε: (i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης K όταν $x = \frac{3}{2}$. (Μονάδες 10)

(ii) Αν $x > 2$ να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση K και να αποδείξετε ότι $K > 3$. (Μονάδες 10)

3. (14412) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$, τότε

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = 2$. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\alpha + \beta > \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha}$. (Μονάδες 13)

4. (14730) Δίνεται η παράσταση $A = |x - 2| + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε : (i) Την τιμή της παράστασης A για $x = 2^3 - 3^2$. (Μονάδες 8)

(ii) Τις τιμές του x , ώστε να ισχύει $A = 5$. (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

5. (15054) Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha < 0 < \beta < \gamma$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός $A = \alpha(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)\beta$ είναι θετικός. (Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha + |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta| - \gamma = 0$. (Μονάδες 9)

6. (35041) Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)

7. (35112) Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι: (i) για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$ (ii) για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$ (Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$.

(Μονάδες 13)

8. (35412) Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές. (Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x - 10|}{x - 10}$ (Μονάδες 15)

9. (36894) α) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$.

(Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2$. (Μονάδες 10)

10. (36898) α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να δείξετε ότι $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ (1). (Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

11. (37201) Δίνεται η παράσταση $A = |x - 1| + |y - 3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι: α) $A = x - y + 2$. (Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Δ

12. (36672) Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $-2, 7$ και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων. (i) $|x + 2|$ (ii) $|x - 7|$ (Μονάδες 8)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$$|x + 2| + |x - 7|$$

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$ γεωμετρικά. (Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (Μονάδες 7)

13. (13179) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$.

α) (i) Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3. (Μονάδες 7)

(ii) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα. (Μονάδες 7)

β) (i) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 5)

(ii) Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - 1\right|$. (Μονάδες 6)

14. (33888) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει: $(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$

α) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α και β .

(Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$. (Μονάδες 12)

15. (38814) Ένας ξυλουργός κατασκευάζει κυκλικά καπάκια βαρελιών χρησιμοποιώντας σανίδες σχήματος ορθογωνίου. Με αυτές κατασκευάζει τετράγωνα, όπως στη δεξιά εικόνα, και κόβει το καπάκι, όπως φαίνεται στις διακεκομμένες γραμμές. Ο ξυλουργός για την κατασκευή ενός τετραγώνου χρησιμοποίησε ακριβώς 4 σανίδες με διαστάσεις α και β .

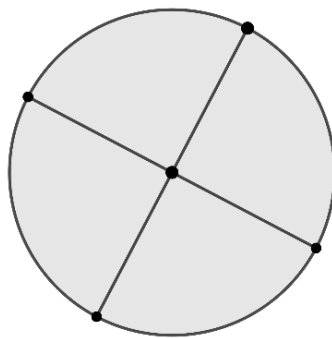


α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου δίνεται από την παράσταση $4\alpha\beta$, σε κάθε περίπτωση. (Μονάδες 5)

β) Αν κάθε σανίδα έχει εμβαδόν 0,3 τετραγωνικά μέτρα, ο ξυλουργός μπορεί να κατασκευάσει καπάκι με διάμετρο 1,3 μέτρα;

(Μονάδες 10)

γ) Για καλύτερη στήριξη ο ξυλουργός τοποθετεί ένα μεταλλικό X όπως αυτό του σχήματος, το οποίο βιδώνεται στο κέντρο και σε τέσσερα σημεία της περιφέρειας του καπακιού.

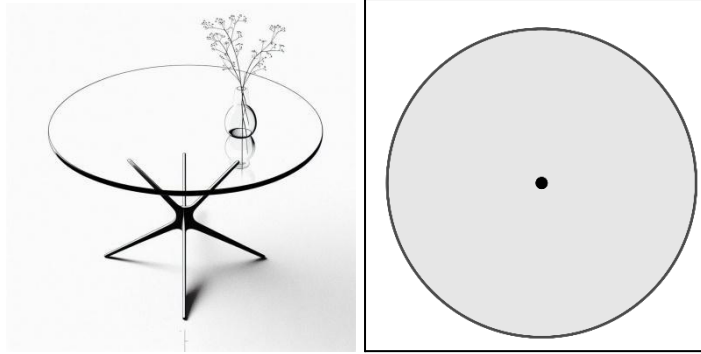


Αν το εμβαδόν του καπακιού είναι 1,5 τετραγωνικό μέτρο, τότε επαρκεί μια μεταλλική ράβδος μήκους 3,1 μέτρων για την κατασκευή του μεταλλικού X;

(Μονάδες 10)

Δίνεται ότι το εμβαδόν ενός είναι κύκλου πr^2 , όπου r είναι η ακτίνα του κύκλου και $\pi \approx 3,14$.

16. (38812) Ο σχεδιαστής μιας εταιρείας κατασκευής επίπλων έχει σχεδιάσει το τραπέζι της εικόνας (αριστερά), που η κυκλική γυάλινη επιφάνειά του (δεξιά) έχει εμβαδόν 1,5 τετραγωνικό μέτρο.



α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κυκλικού τζαμιού είναι ίση με $\rho = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κυκλικού τζαμιού είναι μικρότερη από 0,75 μέτρα. (Μονάδες 10)

γ) Ένας τεχνίτης διαθέτει ένα τετράγωνο κομμάτι τζαμιού με εμβαδόν 2,5 τετραγωνικά μέτρα. Επαρκεί ώστε να φτιάξει την επιφάνεια του τραπεζιού; (Μονάδες 8)

Δίνεται ότι το εμβαδόν ενός κύκλου είναι $\pi\rho^2$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου και $\pi \approx 3,14$.