2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

ΘΕΜΑ Β

1. (**13177**) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \le \alpha \le 3$ και $-2 \le \beta \le -1$.

α) Να δείξετε ότι : $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι : $0 \le \alpha + \beta \le 2$. (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1. (Μονάδες 9)

2. (**14071**) α) Η αλγεβρική παράσταση Κ, που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1, πάνω στον άξονα είναι:

Α. K=|x+1|+|x-2| **Β.** K=|x-1|+|x+2| **Γ.** K=(|x|+1)+(|x|-2)

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

β) Αν είναι K=|x+1| + |x-2| τότε: (i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Κ όταν $x = \frac{3}{2}$. (Μονάδες 10)

(ii) Αν x>2 να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση Κ και να αποδείξετε ότι K>3. (Μονάδες 10)

3. (**14412**) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$, τότε

α) Να δείξετε ότι $\dfrac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \dfrac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = 2$. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\alpha + \beta > \dfrac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \dfrac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha}$. (Μονάδες 13)

4. (**14730**) Δίνεται η παράσταση $A = |x - 2| + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε : (i) Την τιμή της παράστασης A για $x = 2^3 - 3^2$. (Μονάδες 8)

(ii) Τις τιμές του x, ώστε να ισχύει $A = 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

5. (**15054**) Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha < 0 < \beta < \gamma$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός $A = \alpha(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)\beta$ είναι θετικός. (Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha + |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta| - \gamma = 0$. (Μονάδες 9)

6. (**35041**) Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

7. (**35112**) Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι: (i) για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$ (ii) για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$ (Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\dfrac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$.

(Μονάδες 13)

8. (**35412**) Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές. (Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \dfrac{|x - 5|}{x - 5} + \dfrac{|x - 10|}{x - 10}$ (Μονάδες 15)

9. (**36894**) α) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$.

(Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2$. (Μονάδες 10)

10. (**36898**) α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να δείξετε ότι $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ (1). (Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

11. (**37201**) Δίνεται η παράσταση $A=|x-1|+|y-3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$.

Να αποδείξετε ότι: α) $A=x-y+2$. (Μονάδες 12)

β) $0<A<4$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Δ

12. (**36672**) Δίνονται τα σημεία Α , Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2<x<7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων. (i) $|x+2|$ (ii) $|x-7|$ (Μονάδες 8)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$|x+2|+|x-7|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά. (Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (Μονάδες 7)

13. (**13179**) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α,β για τους οποίους ισχύει $1\le\beta\le 2$ και $2\le\alpha\le 4$.

α) (i) Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3. (Μονάδες 7)

(ii) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα. (Μονάδες 7)

β) (i) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha}\le 1\le\frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 5)

(ii) Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right|=\left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right|$. (Μονάδες 6)

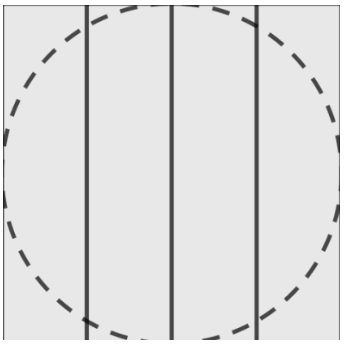
14. (**33888**) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει: $(\alpha-1)(1-\beta)>0$

α) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α και β.

(Μονάδες13)

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K=|\alpha-1|+|1-\beta|$. (Μονάδες 12)

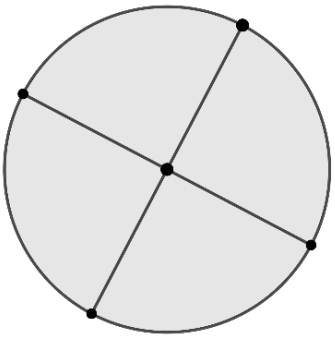
15. (**38814**) Ένας ξυλουργός κατασκευάζει κυκλικά καπάκια βαρελιών χρησιμοποιώντας σανίδες σχήματος ορθογωνίου. Με αυτές κατασκευάζει τετράγωνα, όπως στη δεξιά εικόνα, και κόβει το καπάκι, όπως φαίνεται στις διακεκομμένες γραμμές. Ο ξυλουργός για την κατασκευή ενός τετραγώνου χρησιμοποίησε ακριβώς 4 σανίδες με διαστάσεις α και β.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου δίνεται από την παράσταση 4αβ, σε κάθε περίπτωση.(Μονάδες 5)

β) Αν κάθε σανίδα έχει εμβαδόν $0,3$ τετραγωνικά μέτρα, ο ξυλουργός μπορεί να κατασκευάσει καπάκι με διάμετρο $1,3$ μέτρα;
(Μονάδες 10)

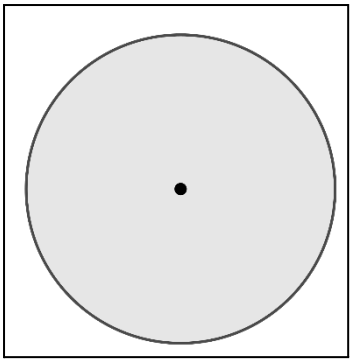
γ) Για καλύτερη στήριξη ο ξυλουργός τοποθετεί ένα μεταλλικό Χ όπως αυτό του σχήματος, το οποίο βιδώνεται στο κέντρο και σε τέσσερα σημεία της περιφέρειας του καπακιού.



Αν το εμβαδόν του καπακιού είναι $1,5$ τετραγωνικό μέτρο, τότε επαρκεί μια μεταλλική ράβδος μήκους $3,1$ μέτρων για την κατασκευή του μεταλλικού Χ;
(Μονάδες 10)

Δίνεται ότι το εμβαδόν ενός είναι κύκλου $\pi\rho^2$, *όπου* ρ *είναι η ακτίνα του κύκλου και* $\pi \simeq 3,14$.

16. (**38812**) Ο σχεδιαστής μιας εταιρείας κατασκευής επίπλων έχει σχεδιάσει το τραπέζι της εικόνας (αριστερά), που η κυκλική γυάλινη επιφάνειά του (δεξιά) έχει εμβαδόν 1,5 τετραγωνικό μέτρο.



α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κυκλικού τζαμιού είναι ίση με $\rho = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κυκλικού τζαμιού είναι μικρότερη από $0,75$ μέτρα. (Μονάδες 10)

γ) Ένας τεχνίτης διαθέτει ένα τετράγωνο κομμάτι τζαμιού με εμβαδόν $2,5$ τετραγωνικά μέτρα. Επαρκεί ώστε να φτιάξει την επιφάνεια του τραπεζιού; (Μονάδες 8)

Δίνεται ότι το εμβαδόν ενός κύκλου είναι $\pi\rho^2$*, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου και* $\pi \simeq 3,14$.