



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

Modelo 2

El examen consta de cuatro partes: la primera no tiene diferentes opciones, y las otras tres tienen dos posibles problemas, a contestar solo uno. En caso de contestar dos problemas de una misma parte, solo se evaluará el primero.

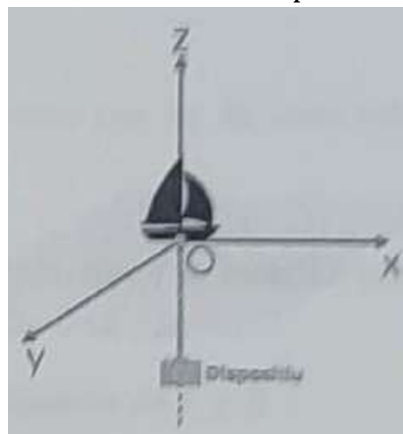
Justificad las respuestas utilizando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda.

Se permite el uso de calculadora científica básica, pero NO se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde).

Parte A. Contestad el único problema de esta parte (total 2,5 puntos)

Problema A1. Un grupo de investigación de la Escuela Politécnica Superior de la UIB participó en diciembre de 2023 en un estudio de las profundidades marinas.

El equipo desplegó diversas tecnologías marinas avanzadas con el fin de explorar y recoger datos de hábitats marinos a una profundidad de 350 m. Por este motivo, una embarcación con el equipo de investigación se dirigió hacia unas coordenadas marinas específicas



a) (1 punto) Una vez alcanzado el punto deseado en la superficie del mar, llamémosle O, sumergieron un dispositivo verticalmente 315 m (vean la figura). A continuación, este se desplazó 37 m sobre la recta $\{x = 0 \ 35y + 12z = -3780\}$ hasta alcanzar la profundidad deseada. Calcula el punto en el que se situó el

dispositivo después de este movimiento considerando el punto O como el centro de referencia (el origen de coordenadas)

Resolución

Como partimos del origen $O(0, 0, 0)$ y bajamos 315 m en vertical llegamos al punto $P(0, 0, -315)$.

Hallemos un vector director de la recta, llamémosla r , de módulo 37:

$$r: \{x = 0 \ z = \frac{-3780 - 35y}{12} = -315 - \frac{35}{12}y\}$$

Si llamamos $y = k$ nos queda $r: \{x = 0 \ y = k \ z = -315 - \frac{35}{12}k\}$. Los vectores directores de r

son $\vec{d} = a\left(0, 1, -\frac{35}{12}\right) // a(0, 12, -35) = (0, 12a, -35a)$. Como el módulo debe ser 37, entonces

$$37 = \sqrt{(12a)^2 + (-35a)^2} = \sqrt{1369a^2} = \pm 37a. \text{ Luego, } a = \pm 1.$$

El vector buscado debe ser $\vec{u} = (0, 12, -35)$ porque tiene que descender 35 m.

El punto buscado es $P + \vec{u} = (0, 0, -315) + (0, 12, -35)$. O sea, $Q(0, 12, -350)$

b) (0,5 puntos) Si queremos mantener la profundidad deseada (350 m), ¿sobre qué plano debe desplazarse el dispositivo?

Resolución

El plano π que se pide pasa por $Q(0, 12, -350)$ y tiene vector normal $\vec{n} = (0, 0, 1)$

Luego, $\pi: 0(x - 0) + 0(y - 12) + 1(z + 350) = 0$, de donde $\pi: z + 350 = 0$

c) (1 punto) Se deja que el dispositivo se desplace libremente sobre el plano calculado en el apartado b) y se va monitorizando desde el barco. Con un GPS se ha detectado, desde el barco, la presencia de un objeto (posiblemente un pez) que se desplaza en línea recta sobre la trayectoria

$$\begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 10 + \lambda \\ z = -380 + 10\lambda \end{cases}$$

Si dicho objeto no cambia su trayectoria, ¿podría chocar contra el dispositivo?

En caso afirmativo, ¿en qué punto podría tener lugar la colisión?

Resolución

Chocaría si el plano $\pi: z + 350 = 0$ y la recta $s: \begin{cases} x = 5 + 4\lambda \\ y = 10 + \lambda \\ z = -380 + 10\lambda \end{cases}$ se cortan. Veamos si lo hacen.

Sustituyendo x, y, z en el plano: $-380 + 10\lambda + 350 = 0 \Rightarrow 10\lambda - 30 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = 5 + 4 \cdot 3 \\ y = 10 + 3 \\ z = -380 + 10 \cdot 3 \end{cases}$$

Vemos que se cortan en el punto $R(17, 13, -350)$

Luego, podrían colisionar, siendo el punto de colisión $R(17, 13, -350)$

Parte B. Escoged un solo problema de esta parte (total 2,5 pt).

Problema B1. Una empresa de construcción necesita comprar diferentes materias primas para elaborar sus productos. Se construyen 4 productos diferentes, los cuales requieren de una cierta cantidad de madera (que tiene un coste de x €/kg), de hierro (que tiene un coste de y €/kg) y de plástico (que tiene un coste de z €/kg). Para la elaboración de los diferentes productos, se ha recopilado la siguiente información sobre el costo en materias primas:

Producto 1: $2x + y - z = 40$ €

Producto 2: $x - y + 2z = 90$ €

Producto 3: $x + 2y = 70$ €

Producto 4: $x - y + z = 50$ €

(a) (0,5 puntos) Describe qué significa la ecuación del producto 1.

Resolución

Como la ecuación del producto 1 es $2x + y - z = 40$, entonces las cantidades para construir el producto 1 cumplen que 2 kg de madera más 1 kg de hierro supera en 40 € el precio de 1 kg de plástico.

(b) (2 puntos) Con los datos disponibles, ¿es posible calcular el precio por kg de cada materia prima?

Es decir, ¿calcular x, y, z ? Justifica tu respuesta.

Resolución

Veamos si podemos resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 40 \\ x - y + 2z = 90 \\ x + 2y = 70 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 70 - 2y \\ x - y + z = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(70 - 2y) + y - z = 40 \\ -3y - 3y + 20 = -100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6y = -120 \\ 3y = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20 \\ z = 3 \cdot 20 - 20 = 40 \end{cases} ; x = 70 - 2 \cdot 20 = 30$$

El precio del kg de madera a 30 €, el kg de hierro a 20 € y el kg de plástico a 40 €.

Problema B2. Sean A y B dos matrices 3×3 tales que A es invertible. Sea I la matriz identidad de dimensión 3×3 .

(a) (1 punto) Sabiendo que $AB + I = A$, calcula la inversa de A en función de I y B .

Resolución

Trasponiendo términos, $A - AB = I \Rightarrow A(I - B) = I$. Sacando factor común A, por la izquierda, $A(I - B) = I$

Vemos que la inversa de A es $A^{-1} = I - B$

(b) (1,5 puntos) Sabiendo que A y su inversa A^{-1} son tales que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz B que satisface la igualdad $AB + I = A$ ¿Es B invertible?

Justifica la respuesta

Resolución

Como $A^{-1} = I - B$, entonces $B = I - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Operando, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$\det B = \left(\frac{1}{2}\right)^3 (6 + 2) = 1 \neq 0 \Rightarrow B$ es invertible

Parte C. Escoged un solo problema de esta parte (total 2,5 pt).

Problema C1. La función que describe la altitud A de un terreno (en metros) a lo largo de un tramo de 500 metros es $A(x) = -0,0001x^3 + 0,05x^2 - 4x + 200$, donde $x \in [0, 500]$ representa la distancia recorrida horizontalmente, medida en metros.

(a) (1,5 puntos) Demuestra que existe al menos un punto donde la altitud es 0 dentro del tramo considerado. Indicación: se puede utilizar el teorema de Bolzano.

Resolución

Teorema de Bolzano: Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo entonces existe por lo menos un $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Como $A(x)$ es continua por ser una función polinómica y $A(0) = -0,0001 \cdot 0^3 + 0,05 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 200 = 200$

$A(500) = -0,0001 \cdot 500^3 + 0,05 \cdot 500^2 - 4 \cdot 500 + 200 = -1800$, por el teorema de Bolzano, existe por lo menos un $c \in [0, 500]$ tal que $A(c) = 0$. Es decir, existe al menos un punto donde la altitud es 0

(b) (1 punto) Estudia los puntos críticos de la función y su crecimiento/decrecimiento para concluir si este punto es único o no. ¿Lo es? Justifica la respuesta.

Resolución

$$A'(x) = -0,0003x^2 + 0,1x - 4 = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 1000x - 40000 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1000 \pm \sqrt{520000}}{-6}$$

Operando, $x \cong 286,85$ ó $x \cong 46,48$

Hagamos una tabla de signos de $A'(x)$ teniendo en cuenta que su gráfica es una parábola cóncava que corta al eje X en 46,48 y en 286,85:

	$(0 ; 46,48)$	46,48	$(46,48 ; 286,85)$	286,85	$(286,85 ; 500)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	decreciente	mínimo	creciente	máximo	decreciente

f es decreciente en $(0 ; 46,48) \cup (286,85 ; 500)$ y creciente en $(46,48 ; 286,85)$

Mínimo relativo: $x = 46,48$, $A(46,48) = -0,0001 \cdot 46,48^3 + 0,05 \cdot 46,48^2 - 4 \cdot 46,48 + 200 = 112,06 > 0$

Máximo relativo: $x = 286,85$,

$A(286,85) = -0,0001 \cdot 286,85^3 + 0,05 \cdot 286,85^2 - 4 \cdot 286,85 + 200 = 806,46 > 0$

Además, este punto de corte es único pues de haber otro punto de corte con el eje de abscisas en el intervalo $[286,85 ; 500]$ debería haber un punto en ese intervalo donde se anule la derivada y ese punto no existe (teorema de Rolle).

Problema C2. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x} \ln \ln (2x)$

(a) (1 punto) Determina el dominio de la función y el comportamiento de la función en los extremos de su dominio

Resolución

Como el logaritmo neperiano sólo está definido para los números reales positivos, $\text{Dom } f = (0, +\infty)$

Además, $f(x) = \frac{1}{0^+} \ln \ln (0^+) = +\infty(-\infty) = -\infty$ y $f(x) = 0$ por ser x un infinito de orden superior a $\ln(2x)$

(b) (1,5 puntos) Calcula el área comprendida entre $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = 5$

Resolución

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln \ln (2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ y si } x > \frac{1}{2}, 2x > 1 \text{ y } \ln(2x) > \ln 1 = 0$$

Esto significa que entre $x = \frac{1}{2}$ y $x = 5$ la gráfica de f está por encima del eje de abscisas.

El área que se pide es $A = \int_{1/2}^5 \frac{1}{x} \ln \ln (2x) dx$. Hallemos $I = \int \frac{1}{x} \ln \ln (2x) dx$ por el método de integración

por partes $\left[u = \ln \ln (2x) \quad \frac{1}{x} dx \quad dv = \frac{1}{x} dx \quad v = \ln \ln (2x) \right]; I = (2x) - I$. Luego, $I = \frac{1}{2} (2x) + c$. Una primitiva del

integrando de la integral inicial es $p(x) = \frac{(2x)}{2}$. Por la regla de Barrow,

$$A = p(5) - p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2 \cdot 5)}{2} - \frac{\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{(10)}{2} \cong 2,65 \text{ u}^2$$

Parte D. Escoged un solo problema de esta parte (total 2,5 pt).

Problema D1. Supongamos que la probabilidad de tener tuberculosis es de 0,0005.

Sabiendo que la probabilidad que la prueba dé positivo cuando la enfermedad está presente es del 99%, y la probabilidad que dé negativo cuando la enfermedad no está presente también es del 99%, responde:

(a) (1,25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad que el test dé positivo si la persona no tiene la enfermedad?

(b) (1,25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de tener tuberculosis si el resultado de la prueba es negativo?

Resolución

Sean los sucesos $A = \text{“tener tuberculosis”}$ $B = \text{“dar positivo en la prueba”}$

Según el enunciado, $p(A) = 0,0005$, $p(B/A) = 99\% = 0,99$ y $p(B^c/A^c) = 99\% = 0,99$.

Se deduce que $p(A^c) = 1 - p(A) = 1 - 0,0005 = 0,9995$ y $p(B^c/A) = 1 - p(B/A) = 1 - 0,99 = 0,01$

a) Se pide $p(B/A^c) = 1 - p(B^c/A^c) = 1 - 0,99 = 0,01 = 1\%$.

$$b) \text{ Piden } p(A/B^c) = \frac{p(A \cap B^c)}{p(B^c)} = \frac{p(A) p(B^c/A)}{p(A) p(B^c/A) + p(A^c) p(B^c/A^c)} = \frac{0,0005 \cdot 0,01}{0,0005 \cdot 0,01 + 0,9995 \cdot 0,99} \cong 0,00005053$$

Problema D2. En una universidad española, el 55% del alumnado son mujeres y el 45% son hombres. En esta universidad, el 13% de las mujeres estudian una carrera STEM, mientras que el 37% de los hombres también estudian una. Si seleccionamos un estudiante al azar:

(a) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccionado estudie STEM?

(b) (1 punto) Sabiendo que el estudiante seleccionado estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

(c) (0,75 puntos) Sabiendo que el estudiante seleccionado NO estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Resolución

Sean los sucesos $A = \text{“ser mujer”}$ $B = \text{“estudiar la carrera STEM”}$. Según el enunciado,

$p(A) = 55\% = 0,55$, $p(A^c) = 45\% = 0,45$, $p(B/A) = 13\% = 0,13$ y $p(B/A^c) = 37\% = 0,37$.

Se deduce que $p(B^c/A) = 1 - p(B/A) = 1 - 0,13 = 0,87$

a) Se pide $p(B)$, que usando el teorema de probabilidad total es:

$$p(B) = p(A)p(B/A) + p(A^c)p(B/A^c) = 0,55 \cdot 0,13 + 0,45 \cdot 0,37 = 0,238 = 23,8\%$$

$$b) \text{ Piden } p(A/B^c) = \frac{p(A \cap B^c)}{p(B^c)} = \frac{p(A) p(B^c/A)}{1 - p(B)} = \frac{0,55 \cdot 0,87}{1 - 0,238} \cong 0,628 = 62,8\%$$