ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАНИЯ
первого тура республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика», 2022/2023 учебный год

11 класс

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предлагается выполнить 5 заданий по математике. За каждое правильно выполненное задание начисляется 6 баллов, максимальная сумма 30 баллов.

Задания необходимо выполнять на отдельном листе в любом удобном для вас порядке. *Перед записью решения указать номер задания. Условие записывать необязательно, а вот решение запишите как можно подробнее. Пользуйтесь черновиком для поиска решения, черновик не забудьте сдать вместе с чистовиком.*

Пишите разборчиво, яркой пастой!

При решении заданий можно пользоваться только ручкой, карандашом и линейкой. Использовать калькулятор, сотовый телефон, планшет и другие электронные средства, справочные материалы ***НЕ РАЗРЕШАЕТСЯ!!!***

Время выполнения заданий 3 часа.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!

1. Дан многочлен

$$p(x)=\frac{\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x-\sqrt[3]{13}\right)}{\left(\sqrt[5]{3}-\sqrt[3]{13}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt[3]{13}\right)}+\frac{\left(x-\sqrt[5]{3}\right)\left(x-\sqrt[3]{13}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt[3]{13}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt[5]{3}\right)}+\frac{\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x-\sqrt[5]{3}\right)}{\left(\sqrt[3]{13}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt[3]{13}-\sqrt[5]{3}\right)}.$$

Найдите $p(\sqrt[3]{17})$.

2. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* диагональ *BD* является биссектрисой угла *ABC* и *AC*=*BC*.

Найдите угол $\angle BAD$, если известно, что $\angle ACB = 20^\circ$ и $\angle BDC = 80^\circ$.

3. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c), удовлетворяющих условию $\begin{cases} 2a^2+4b^2-3c^2=54, \\ 3a^2+7b^2-5c^2=74. \end{cases}$

4. Найдите все функции *f(x)*, заданные на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, для которых при любом действительном *x* справедливо равенство $x\left(f(x)+f(-x)+4\right)+2f(x)+2=0$.

5. Парламент состоит из четырёх фракций; в первой фракции 3 депутата, во второй – 4, в третьей – 5 и в четвёртой 6 депутатов. Нужно сформировать парламентские комиссии так, чтобы в любой комиссии были представители каждой из четырех фракций и чтобы никакие две из них не имели более чем одного общего члена. (Каждый депутат входит только в одну из четырех фракций.)

Какое наибольшее число комиссий можно сформировать с соблюдением указанных условий?

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАНИЯ

первого тура республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика», 2022/2023 учебный год

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

11 класс

Уважаемые коллеги!

Для единых норм проверки работ участников олимпиады в разных школах необходимо придерживаться критериев оценивания работ.

*Каждая задача оценивается **целым числом** баллов от 0 до 6. Максимальная сумма 30 баллов. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.*

Основные принципы оценивания приведены в таблице:

Баллы	**Критерии оценивания решения**
6	Полное верное решение с обоснованием с применением нестандартных подходов
5	Любое полное верное решение с обоснованием
4	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
3	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений
2	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев (вариантов) решения. Доказаны, рассмотрены вспомогательные утверждения или обоснования, помогающие в решении задачи
1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). Приведён только верный ответ.
0	Решение неверное
0	Решение отсутствует

Любое правильное решение оценивается в 6 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение учащегося отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень её правильности и полноты решения.

Любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при её выполнении.

Баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, но не содержащего продвижений в решении задачи.

Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов. Поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

1. Ответ: 1.

Решение. Можно заметить, что $p(\sqrt{7}) = p(\sqrt[3]{13}) = p(\sqrt[5]{3}) = 1$. Т.к. многочлен $p(x)$, имеет вид $ax^2 + bx + c$, то это возможно лишь в случае $p(x) = 1$ при любых *x*.

2. Ответ: $120°$.

Решение. ΔABC - равнобедренный с углом $\angle ACB = 20°$ при вершине. Поэтому $\angle BAC = \angle ABC = 80°$. Тогда $\angle BAC = \angle BDC = 80°$ и опираются на отрезок BC и лежат по одну сторону от прямой BC, то вокруг четырехугольника *ABCD* можно описать окружность. Т.к. *BD* является биссектрисой угла *ABC,* то $\angle DBC = 40°$. Тогда $\angle DAC = \angle DBC = 40°$ как опирающийся на ту же дугу. В результате $\angle BAD = \angle BAC + \angle DAC = 80° + 40° = 120°$.

3. Ответ: (7; 1; 4), (13; 11; 16).

Решение. Умножая первое уравнение на 5, второе – на (-3) и почленно складывая, получим $a^2 - b^2 = 48 = 2^4 \cdot 3$. Т.к. числа *a*+*b* и *a*-*b* имеют одинаковую четность, а их произведение четно, то оба этих числа четны, причем $0 < a - b < a + b$. Поэтому возможны только три случая:

1) $\begin{cases} a + b = 24, \\ a - b = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 13, \\ b = 11; \end{cases}$ и тогда из исходной системы находим *c=16*;

2) $\begin{cases} a + b = 12, \\ a - b = 4; \end{cases}$ но тогда $c \notin N$.

3) $\begin{cases} a + b = 8, \\ a - b = 6; \end{cases}$ и тогда из исходной системы находим *c = 4*.

4. Ответ: $f(x) = -x - 1$.

Решение. Т.к. равенство из условия справедливо при любом *x*, то, заменяя *x* на –*x*, получим верное при всех действительных *x* равенство $-x\big(f(-x) + f(x) + 4\big) + 2f(-x) + 2 = 0$. Складывая полученное равенство с исходным, получим, что $2f(x) + 2f(-x) + 4 = 0$, или $f(x) + f(-x) = -2$. Тогда исходное равенство принимает вид $x(-2 + 4) + 2f(x) + 2 = 0$, откуда находим, что $f(x) = -x - 1$. Подставляя полученную функцию в исходное равенство, убеждаемся, что действительно получается тождество.

5. Ответ: 12 комиссий.

Решение. Обозначим фракции, содержащие 3, 4, 5 и 6 депутатов, через A, B, C и D соответственно. Заметим, что каждый депутат из фракции A может быть членом не более чем 4-х комиссий. В самом деле, если бы комиссий, членом которых является некоторый депутат x фракции A, было не менее 5-и, то среди них нашлось бы две, в которые входит один и тот же депутат (обозначим его y) из фракции B (поскольку в B только 4 депутата). Но тогда эти две комиссии имеют по 2 общих члена x и y, чего по условию задачи быть не может.

Так как во фракции A 3 депутата и каждая комиссия имеет хотя бы одного из них своим членом, а любой из этих 3-х депутатов, как доказано, может входить не более чем в 4 комиссии, то всего комиссий можно сформировать не более $3 \cdot 4 = 12$.

Остаётся на примере показать, что 12 комиссий с соблюдением условий задачи сформировать можно. Пронумеруем в каждой фракции депутатов. Каждая из строящихся комиссий будет состоять из 4-х членов, её мы записываем как четвёрку, на 1-м, 2-м, 3-м и 4-м местах которой стоят депутаты из фракций A, B, C и D соответственно. Пример:
$\{1, 1, 1, 1\}$, $\{1, 2, 2, 2\}$, $\{1, 3, 3, 3\}$, $\{1, 4, 4, 4\}$,
$\{2, 1, 2, 3\}$, $\{2, 2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4, 1\}$, $\{2, 4, 1, 2\}$,
$\{3, 1, 3, 5\}$, $\{3, 2, 4, 3\}$, $\{3, 3, 5, 2\}$, $\{3, 4, 2, 1\}$,
как видим, депутат 6 из фракции D даже не понадобился для составления комиссий.