CHƯƠNG 3 NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

CHỦ ĐỀ: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN HÀM ẨN
(CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TRONG TÍCH PHÂN HÀM ẨN)

Đây là một phần chuyên đề, thầy cô có thể truy cập tải bản đầy đủ tại địa chỉ - http://bit.ly/2HJSPsf

DẠNG 1: Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức $u(x).f'(x)+u'(x).f(x)=h(x)$

Biết trước $u(x)$, $h(x)$. Tìm $f(x)$?

I. LÝ THUYẾT

Từ đẳng thức $u(x).f'(x)+u'(x).f(x)=h(x)$

$$\Leftrightarrow \left[f(x).u(x)\right]'=h(x).$$

Suy ra $f(x).u(x)=\int h(x)\mathrm{d}x \Rightarrow f(x)$.

Đây là một phần chuyên đề, thầy cô có thể truy cập tải bản đầy đủ tại địa chỉ - http://bit.ly/2HJSPsf

II. HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1

[Mức độ 3] Cho hàm số xác định và liên tục trên thỏa mãn và . Tính .

Lời giải

Ta có $2x.f(x)+x^2f'(x)=3x^2+1 \Leftrightarrow \left[x^2f(x)\right]'=3x^2+1$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta có

$\int\left[x^2f\left(x\right)\right]'\mathrm{dx}=\int\left(3x^2+1\right)\mathrm{dx}\Rightarrow x^2f\left(x\right)=x^3+x+C$.

Mà $f\left(1\right)=3\Rightarrow 3=2+C\Leftrightarrow C=1\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{x^3+x+1}{x^2}\Rightarrow f\left(2\right)=\dfrac{11}{4}$.

Câu 2

[Mức độ 3] Cho hàm số xác định và liên tục trên thỏa mãn và . Tính .

Lời giải

Ta có $f\left(x\right)=2x^3+3x^2-x.f'\left(x\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)+x.f'\left(x\right)=2x^3+3x^2\Leftrightarrow\left[x.f\left(x\right)\right]'=2x^3+3x^2$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta có

$\int\left[xf\left(x\right)\right]'\mathrm{dx}=\int\left(2x^3+3x^2\right)\mathrm{dx}\Rightarrow xf\left(x\right)=\dfrac{x^4}{2}+x^3+C$.

Mà $f\left(2\right)=4\Rightarrow 2.4=\dfrac{2^4}{2}+2^3+C\Leftrightarrow C=-8\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{x^4+2x^3-16}{2x}\Rightarrow f\left(1\right)=\dfrac{-13}{2}$.

Câu 3

[Mức độ 3] Cho hàm số liên tục trên và thoả mãn . Biết. Tính .

[Mức độ 3] Cho hàm số xác định và liên tục trên thỏa mãn và . Tính .

Lời giải

Ta có:

$2\sin 2x.f\left(x\right)+\left(1-\cos 2x\right)f'\left(x\right)=\sin 2x\left(3\sin x+4\right)\Leftrightarrow\left[\left(1-\cos 2x\right)f\left(x\right)\right]'=\sin 2x\left(3\sin x+4\right)$

Lấy nguyên hàm hai vế ta có

$\int\left[\left(1-\cos 2x\right)f\left(x\right)\right]'\mathrm{d}x=\int\sin 2x\left(3\sin x+4\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\left(1-\cos 2x\right)f\left(x\right)=\int\left(6\sin^2 x\cos x+8\sin x\cos x\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow 2\sin^2 x.f\left(x\right)=2\sin^3 x+4\sin^2 x+C$.

Mà $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3\Rightarrow 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right).f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin^3\dfrac{\pi}{2}+4\sin^2\dfrac{\pi}{2}+C$ $\Rightarrow C=0$.

Vậy $f(x)=\sin x+2\Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{4+\sqrt{3}}{2}$.

Đây là một phần chuyên đề, thầy cô có thể truy cập tải bản đầy đủ tại địa chỉ - http://bit.ly/2HJSPsf

Câu 4

[Mức độ 3] Cho hàm số liên tục trên và thoả mãn . Biết. Tính .

Lời giải

Ta có: $x\left[f'(x)-6\right]=\dfrac{2x+1}{x}-f(x)\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=6x+\dfrac{1}{x}+2\Leftrightarrow\left[xf(x)\right]'=6x+\dfrac{1}{x}+2$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được

$\int xf(x)\mathrm{d}x=\int\left(6x+\dfrac{1}{x}+2\right)\mathrm{d}x\Rightarrow xf(x)=3x^2+\ln x+2x+C$.

Mà $f(1)=5\Rightarrow 5=3.1^2+\ln 1+2.1+C\Rightarrow C=0$.

Vậy $f(x)=3x+\dfrac{\ln x}{x}+2\Rightarrow f(e)=3e+\dfrac{1}{e}+2$.

Câu 5

[Mức độ 3] Cho hàm số có đạo hàm trên thỏa mãn , , . Tính giá trị của biểu thức .

Lời giải

Xét phương trình $2xf'(x)+f(x)=2x$, vì $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ nên liên tục trên khoảng này.

Chia cả hai vế cho $2\sqrt{x}$, ta được $\sqrt{x}\cdot f'(x)+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot f(x)=\sqrt{x}$ $\Leftrightarrow\left[\sqrt{x}.f(x)\right]'=\sqrt{x}$.

Lấy tích phân từ 1 tới 4 cả hai vế ta được $\int\limits_1^4\left(\sqrt{x}.f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int\limits_1^4\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow\left.\left(\sqrt{x}.f(x)\right)\right|_1^4=\left.\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\right|_1^4\Rightarrow 2f(4)-f(1)=\dfrac{14}{3}\Rightarrow f(4)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{14}{3}+1\right)=\dfrac{17}{6}$ (vì $f(1)=1$).

Vậy $f(4)=\dfrac{17}{6}$.

Đây là một phần chuyên đề, thầy cô có thể truy cập tải bản đầy đủ tại địa chỉ - http://bit.ly/2HJSPsf

Câu 6

[Mức độ 3] Cho hai hàm số và có đạo hàm trên đoạn và thỏa mãn hệ thức

Tính .

Lời giải

Ta có $f(x)+g(x)=-x\left[f'(x)+g'(x)\right] \Rightarrow \int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=-\int x\left[f'(x)+g'(x)\right]\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=-x\left[f(x)+g(x)\right]+\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow -x\left[f(x)+g(x)\right]=C \Rightarrow f(x)+g(x)=-\frac{C}{x}$. Vì $f(1)+g(1)=-C \Rightarrow C=-4$

Do đó $f(x)+g(x)=\frac{4}{x}$. Vậy $I=\int_1^4\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=8\ln 2$.

Câu 7

[Mức độ 3] Cho là hàm số liên tục trên thỏa mãn với mọi và . Tính .

Lời giải

Ta có $f(x)+f'(x)=\sin x$, với mọi $x\in\mathbf{R}$ nên suy ra $\mathrm{e}^x f(x)+\mathrm{e}^x f'(x)=\mathrm{e}^x.\sin x$, với mọi $x\in\mathbf{R}$.

$\Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^x f(x)\right]'=\mathrm{e}^x.\sin x$ hay $\int_0^{\pi}\left[\mathrm{e}^x f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x.\sin x\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^x f(x)\right]\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)\right]\Big|_0^{\pi} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\pi} f(\pi)-f(0)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi}+1\right) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\pi} f(\pi)=\frac{\mathrm{e}^{\pi}+3}{2}$.

Câu 8

[Mức độ 4]

Cho hàm số liên tục trên thỏa mãn điều kiện và . Giá trị , với. Tính .

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}.f'(x)+\dfrac{1}{(x+1)^2}.f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{x}{x+1}.f(x)\right]'=\dfrac{x}{x+1}$, với $\forall x\in(0;+\infty)$.

Suy ra $\dfrac{x}{x+1}.f(x)=\int\dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x$ hay $\dfrac{x}{x+1}.f(x)=x-\ln|x+1|+C$.

Mặt khác, ta có $f(1)=-2\ln 2$ nên $C=-1$. Do đó $\dfrac{x}{x+1}.f(x)=x-\ln|x+1|-1$.

Với $x=2$ thì $\dfrac{2}{3}.f(2)=1-\ln 3 \Leftrightarrow f(2)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\ln 3$. Suy ra $a=\dfrac{3}{2}$ và $b=-\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a^2+b^2=\dfrac{9}{2}$.

Câu 9

[Mức độ 4] Cho hàm số có đạo hàm trên thỏa mãn , và . Tính .

Lời giải

Ta có: $\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \left[f'(x).f(x)\right]'=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f'(x).f(x)=3x^5+6x^2+C_1$

Do $f(0)=f'(0)=1$ nên ta có $C_1=1$. Do đó: $f'(x).f(x)=3x^5+6x^2+1$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}f^2(x)\right)'=3x^5+6x^2+1 \Leftrightarrow f^2(x)=x^6+4x^3+2x+C_2$.

Mà $f(0)=1$ nên ta có $C_2=1$. Do đó $f^2(x)=x^6+4x^3+2x+1$.

Vậy $f^2(1)=8$.

Câu 10

[Mức độ 4] Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng và , . Biết rằng , và , .
Tính tích phân theo và .

Lời giải

$\forall x \in (0;1)$ ta có:

$x + xf'(x) = 2f(x) - 4 \Leftrightarrow x + 4 = 2f(x) - xf'(x) \Rightarrow x^2 + 4x = 2xf(x) - x^2 f'(x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+4x}{f^2(x)} = \dfrac{2xf(x) - x^2 f'(x)}{f^2(x)} \Leftrightarrow \dfrac{x^2+4x}{f^2(x)} = \left(\dfrac{x^2}{f(x)}\right)'$.

Tính $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x.\cos x + 2\sin 2x}{f^2(\sin x)} \mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x.\cos x + 4\sin x.\cos x}{f^2(\sin x)} \mathrm{d}x$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x$, đổi cận $x = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2+4t}{f^2(t)} \mathrm{d}t = \left.\frac{t^2}{f(t)}\right|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{4b} - \frac{1}{4a} = \frac{3a-b}{4ab}$.

Câu 11

[Mức độ 4] Cho hàm số liên tục trên thỏa mãn . Biết .
Tính

Lời giải

$\displaystyle\int_0^1 e^x\left[f(x) + f'(x)\right]dx = ae + b$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^1 \left[e^x f(x)\right]' dx = ae + b \Leftrightarrow \left. e^x f(x)\right|_0^1 = ef(1) - f(0) = e - 1$

Vậy $a=1;b=-1$

$Q=a^{2018}+b^{2018}=2$

Câu 12

[Mức độ 3] Cho hàm số liên tục và có đạo hàm trên . Biết đẳng thức được thỏa mãn . Tính giá trị .

Lời giải

$\forall x\in(-1;+\infty)$, ta nhân cả hai vế đẳng thức trên cho $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ thì ta được:

$$2f(x)+(x^2-1)f'(x)=\frac{x(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}}\Leftrightarrow\frac{2}{(x+1)^2}f(x)+\frac{x-1}{x+1}f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}.$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x-1}{x+1}f(x)\right)'=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\Rightarrow\int_0^1\left(\frac{x-1}{x+1}f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\mathrm{d}x\Rightarrow\left.\left(\frac{x-1}{x+1}f(x)\right)\right|_0^1=\left.\left(\sqrt{x^2+3}\right)\right|_0^1$$

$\Rightarrow f(0)=2-\sqrt{3}$.

DẠNG 2: Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức

$$u(x)f'(x)-u'(x)f(x)=h(x)$$

I. LÝ THUYẾT

Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức $u(x).f'(x)-u'(x)f(x)=h(x) \quad (2)$.

Biết trước $u(x),h(x)$. Tìm $f(x)$?

Phương pháp chung:

Cơ sở của phương pháp $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'.v-uv'}{v^2}$.

- Bước 1. Chia hai vế của (2) cho $u^2(x)\neq 0$ ta được

$$u(x).f'(x)-u'(x)f(x)=h(x) \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{u(x)}\right]'=\frac{h(x)}{u^2(x)}.$$

- Bước 2. Lấy nguyên hàm hai vế ta được $\dfrac{f(x)}{u(x)}=\displaystyle\int\frac{h(x)}{u^2(x)}\mathrm{d}x$.

- Bước 3. Tính $\displaystyle\int\frac{h(x)}{u^2(x)}\mathrm{d}x$, từ đó suy ra $f(x)$.

II. HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

[Mức độ 3] Cho hàm số liên tục và có đạo hàm trên đoạn thỏa mãn , với mọi và . Tính tích phân

Lời giải

Với $x\neq 0$, ta có

$$xf'(x)-f(x)=x^2 \Rightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=1 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=1 \Rightarrow \frac{f(x)}{x}=x+C$$

$\Rightarrow f(x)=x^2+Cx$. Vì $f(1)=1$ nên $C=0$. Do đó $f(x)=x^2$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{4}$.

[Mức độ 3] Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên thỏa mãn và . Tính

Lời giải

Do $x \in [1;2]$ nên $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2x + 3 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 2x + 3$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = x^2 + 3x + C$.

Do $f(1) = 4$ nên $C = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2$.

Vậy $f(2) = 20$.

[Mức độ 3] Cho hàm số có đạo hàm cấp hai liên tục trên , , và . Tính .

Lời giải

Ta có: $\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + C$

$\Rightarrow \ln f(x) = \int (x + C)\,dx = \frac{x^2}{2} + Cx + D$

Vì vậy $f(x) = e^{\frac{x^2}{2} + Cx + D}; f(0) = 1; f(2) = e^4 \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ 2 + 2C + D = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ D = 0 \end{cases}$

Suy ra $f(x) = e^{\frac{x^2}{2} + x} \Rightarrow f(1) = e^{\frac{3}{2}}$.

[Mức độ 4]

Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên thoả mãn với mọi và . Tính tích phân

Lời giải

Xét $x \neq 0$:

Từ giả thiết $3f(x) - xf'(x) = x^{2018}$, nhân hai vế cho x^2 ta được

$$3x^2 f(x) - x^3 f'(x) = x^{2020}$$

Chia hai vế cho x^6 ta được: $\dfrac{3x^2 f(x) - x^3 f'(x)}{x^6} = x^{2014} \Leftrightarrow \left[\dfrac{f(x)}{x^3}\right]' = -x^{2014}$

Suy ra $\left[\dfrac{f(x)}{x^3}\right]' = -x^{2014} \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x^3} = -\dfrac{1}{2015}.x^{2015} + C$

Thay $x = 1$ vào hai vế ta được $C = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{-x^{2018}}{2015}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^1 \dfrac{1}{2015}x^{2018}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2015}.\dfrac{1}{2019}x^{2019}\Big|_0^1 = -\dfrac{1}{2015 \times 2019}$.

[Mức độ 4]
Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên thỏa mãn với mọi Tính

Lời giải

Chia cả hai vế cho e^x ta có

$$f(x) - f'(x) = e^x\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \frac{e^x f(x) - e^x f'(x)}{e^{2x}} = \sqrt{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{e^x}\right]' = -\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x} = -\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C$$

Cho $x = 4$, ta có $\dfrac{f(4)}{e^4} = -9 + C$

Cho $x = 0$, ta có $f(0) = -\dfrac{1}{3} + C$

Vậy $\dfrac{f(4)}{e^4} - f(0) = -\dfrac{26}{3}$

[Mức độ 4]
Cho hàm số có đạo hàm và liên tục trên thỏa mãn và Tính

Lời giải

Chia hai vế cho e^{x^2} để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$\frac{e^{x^2} f'(x) - 2xe^{x^2} f(x)}{e^{2x^2}} = 2x \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{e^{x^2}}\right]' = 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{x^2}} = x^2 + C$$

Cho $x = 0$, ta có $C = f(0) = -2$. Suy ra $f(x) = (x^2 - 2)e^{x^2}$

Cho $x = 1$, ta có $f(1) = -e$

[Mức độ 4] Cho hàm số có đạo hàm trên thỏa mãn với mọi và Tính giá trị

Lời giải

Chia hai vế cho e^{2018x} để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$\frac{f'(x) - 2018 f(x)}{e^{2018x}} = 2018x^{2017} \Leftrightarrow \frac{e^{2018x}.f'(x) - 2018.e^{2018x} f(x)}{\left(e^{2018x}\right)^2} = 2018x^{2017}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{e^{2018x}}\right]' = 2018x^{2017} \Rightarrow \frac{f(x)}{e^{2018x}} = x^{2018} + C$$

Thay $x = 0$ vào hai vế ta được $C = 2018 \Rightarrow f(x) = \left(x^{2018} + 2018\right)e^{2018x}$.

Vậy $f(1) = 2019e^{2018}$.

[Mức độ 4] Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên , thỏa mãn và . Biết rằng . Tính

Lời giải

Ta có $f'(x)-2f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=2 \Leftrightarrow \left[\ln f(x)\right]'=2 \Rightarrow \ln f(x)=2x+C$

Thay $x=1$ vào hai vế ta được $C=-2 \Rightarrow f(x)=e^{2x-2}$

Vậy $f(-1)=e^{-3}$

[Mức độ 4] Cho hàm số liên tục và có đạo hàm trên thỏa mãn hệ thức Biết rằng trong đó . Tính giá trị của biểu thức .

Lời giải

Ta có

$$f'(x)-\cot x.f(x)=x.\sin x \Leftrightarrow \frac{\sin x.f'(x)-\cos x.f(x)}{\sin^2 x}=x$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{\sin x}\right]'=x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\sin x}=\frac{1}{2}x^2+C$$

Cho $x=\dfrac{\pi}{3}$ ta có $\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{\pi^2}{18}+C \Rightarrow \dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi^2}{36}+\dfrac{C}{2}$

Cho $x=\dfrac{\pi}{6}$ ta có $\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{\pi^2}{72}+C \Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi^2}{144}+\dfrac{C}{2}$

Khi đó $\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}}-f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{48}\pi^2$. Vậy $a=1,b=48 \Rightarrow P=a+b=49$.

[Mức độ 3] Cho hàm số có đạo hàm liên tục và có đạo hàm trên khoảng và thỏa mãn , ; biết . Tính giá trị

Lời giải

Vì $x \in (1;+\infty)$ nên ta có : $\left(x^2 f'(x) - 2xf(x)\right)\ln x = x^4 - xf(x)$ $\Leftrightarrow \left(\dfrac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4}\right)\ln x = 1 - \dfrac{f(x)}{x^3}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)' \ln x = 1 - \dfrac{f(x)}{x^3}$ $\Rightarrow \int \left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)' \ln x dx = \int \left(1 - \dfrac{f(x)}{x^3}\right) dx$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)\ln x}{x^2} - \int \dfrac{f(x)}{x^3}\mathrm{d}x = x - \int \dfrac{f(x)}{x^3}\mathrm{d}x + C$ $\Rightarrow \dfrac{f(x)\ln x}{x^2} = x + C$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)\ln x}{x^2} = x + C \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2\left(x+C\right)}{\ln x}$.

Theo bài ra $f\left(\sqrt[3]{e}\right) = 3e \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^3}{\ln x}$. Do đó $f(2) = \dfrac{8}{\ln 2}$.

DẠNG 3: Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức $f'(x)+f(x)=g(x)$

Biết trước $g(x)$. Tìm $f(x)$

I. LÝ THUYẾT

Từ đẳng thức $f'(x)+f(x)=g(x)$

$$\Leftrightarrow e^x f'(x)+e^x f(x)=e^x g(x)$$

$$\Leftrightarrow \left[e^x f(x)\right]'=e^x g(x)$$

Suy ra: $e^x f(x)=\int e^x g(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow f(x)$

Các dạng mở rộng

1) $\left[f(x).e^{kx}\right]'=e^{kx}.f'(x)+ke^{kx}f(x)$.

2) $\left[f(x).e^{-kx}\right]'=e^{-kx}.f'(x)-ke^{kx}f(x)=e^{-kx}\left(f'(x)-kf(x)\right)$.

3) $\left[f(x).e^{-kx}\right]''=e^{-kx}\left(f''(x)-2kf'(x)+k^2f(x)\right)$.

4) $\left[f(x).e^{kx}\right]''=e^{kx}\left(f''(x)+2kf'(x)+k^2f(x)\right)$.

II. HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1

[Mức độ 3] Cho hàm số liên tục, có đạo hàm trên đoạn và với mọi . Biết và . Tính .

Lời giải

Ta có $f(x)>0$ với mọi x thuộc ℝ nên $f'(x)+2f(x)=0$ $\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=-2$

$\Rightarrow \left(\ln\left(f(x)\right)\right)'=-2 \Leftrightarrow \ln\left(f(x)\right)=-2x+C \Rightarrow f(x)=e^{-2x+C}$.

Từ $f(1)=1 \Rightarrow e^{-2.1+C}=1 \Leftrightarrow -2+C=0 \Leftrightarrow C=2$ $\Rightarrow f(x)=e^{-2x+2}$.

Suy ra $f(-1)=e^{-2.(-1)+2}=e^4$.

Câu 2

[Mức độ 3] Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên , thỏa mãn và . Biết rằng , Tính giá trị của

Lời giải

Ta có $f'(x)-2f(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=2f(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=2$ (do $f(x)>0$)

$\left(\ln\left(f(x)\right)\right)'=2 \Leftrightarrow \ln f(x)=2x+C$ (do $f(x)>0$).

Mà $f(1)=1 \Rightarrow C=-2 \Rightarrow \ln f(x)=2x-2 \Rightarrow f(x)=e^{2x-2} \Rightarrow f(-1)=e^{-4}=\dfrac{1}{e^4}$.

Câu 3

[Mức độ 3] Cho hàm số liên tục; có đạo hàm trên đoạn và thỏa mãn, . Tính .

Lời giải

Ta có: $f(x)+f'(x)=-2,\ \forall x\in[0;2]$.

$\Leftrightarrow e^x f(x)+e^x f'(x)=-2e^x$

$\Leftrightarrow \left[e^x f(x)\right]'=-2e^x$

$\Leftrightarrow e^x f(x)=\int\left(-2e^x\right)dx=-2e^x+C$.

Do $f(0)=2$ nên $C=4$.

Khi đó: $e^x f(x)=-2e^x+4 \Rightarrow f(x)=-2+\dfrac{4}{e^x}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(-2+\dfrac{4}{e^x}\right)dx=2x-\left.\dfrac{4}{e^x}\right|_0^1=2-\dfrac{4}{e}$.

Câu 4

[Mức độ 3] Cho hàm số liên tục, có đạo hàm trên đoạn và , . Tính   .

Lời giải

Ta có: $f\left(x\right)+f'\left(x\right)=x,\ \forall x\in\left[1;1\right]$.

$\Leftrightarrow e^{x}f\left(x\right)+e^{x}f'\left(x\right)=xe^{x}$

$\Leftrightarrow \left[e^{x}f\left(x\right)\right]'=xe^{x}$

$\Leftrightarrow e^{x}f\left(x\right)=\int xe^{x}dx=xe^{x}-e^{x}+C$.

Do $f\left(0\right)=-1$ nên $C=0$.

Khi đó: $e^{x}f\left(x\right)=xe^{x}-e^{x}\Rightarrow f\left(x\right)=x-1$.