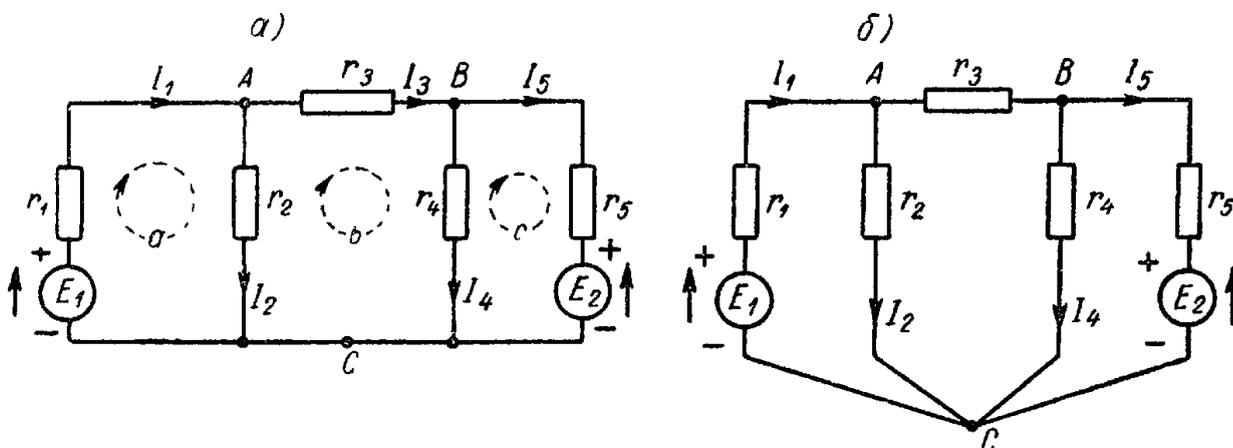


## Лекція 12

### Розрахунок складних ланцюгів постійного струму

#### Метод контурних струмів



Рисунок

Тепер рівняння **другого закону Кірхгофа** для контуру  $a$  можна переписати так:

$$r_1 I_1 + r_2 I_2 = E_1;$$

$$r_1 I_a + (I_a - I_b) r_2 = E_1$$

або через взаємні опори

$$r_a I_a - I_b r_{ab} = E_1.$$

Рівняння для контуру  $b$  в нових позначках запишеться наступним чином

$$r_3 I_3 + r_4 I_4 - r_2 I_2 = 0;$$

$$I_b r_3 + (I_b - I_a) r_4 - (I_b - I_a) r_2 = 0$$

або

$$I_b r_{bb} - I_a r_{ba} - I_c r_{bc} = 0.$$

Для контуру  $c$  отримаємо

$$r_5 I_5 - r_4 I_4 = -E_2;$$

$$E_c r_5 - (I_b - I_c) r_4 = -E_2$$

або

$$E_c r_c - I_b r_{bc} = -E_2.$$

$$r_a I_a - I_b r_{ab} = E_1.$$

$$I_b r_{bb} - I_a r_{ba} - I_c r_{bc} = 0$$

$$E_c r_c - I_b r_{bc} = -E_2.$$

Таким чином, ми отримали три незалежних рівняння, з яких можемо знайти три невідомі струми  $I_a, I_b, I_c$ . Розв'язувати треба не п'ять, а три рівняння.

**Загальне правило для складання контурного струму:** при обході всіх контурів в одному напрямку, який співпадає з обраним позитивним напрямком контурного струму, в лівій частині рівняння для даного контуру складаються: із знаком «плюс» падіння напруги, яке створюється контурним струмом на контурному опорі та із знаком «мінус» падіння напруги, які створюються суміжними контурними струмами на взаємних опорах, якщо контурні струми на цих опорах спрямовані назустріч один одному. В правій частині рівняння записується алгебраїчна сума діючих в контурі ЕРС (контурних ЕРС), причому ЕРС, напрямки яких співпадають з напрямком обходу, вважаються позитивними.

В загальному випадку система рівнянь контурних струмів може бути записана в такому вигляді:

$$\begin{cases} E_a r_a - I_b r_{ab} - I_c r_{ac} \dots = \sum a, \\ E_b r_b - I_a r_{ab} - I_c r_{bc} \dots = \sum b, \\ \dots \end{cases}$$

Число необхідних контурних струмів для розв'язання рівнянь в даному методі, вочевидь, дорівнює числу незалежних контурів, тобто  $n = m - p + 1 = m - k$ , тут  $m$  – кількість гілок (в нашій схемі 5),  $p$  – кількість вузлів (у нас 3),  $k = p - 1$  – число незалежних вузлів (у нас 2). Тобто для нашого кола  $m - p + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$  або  $m - k = 5 - 2 = 3$  рівняння.

Таким чином, ми розглянули два методи розрахунку лінійних електричних кіл: метод рівнянь Кірхгофа і метод контурних струмів.

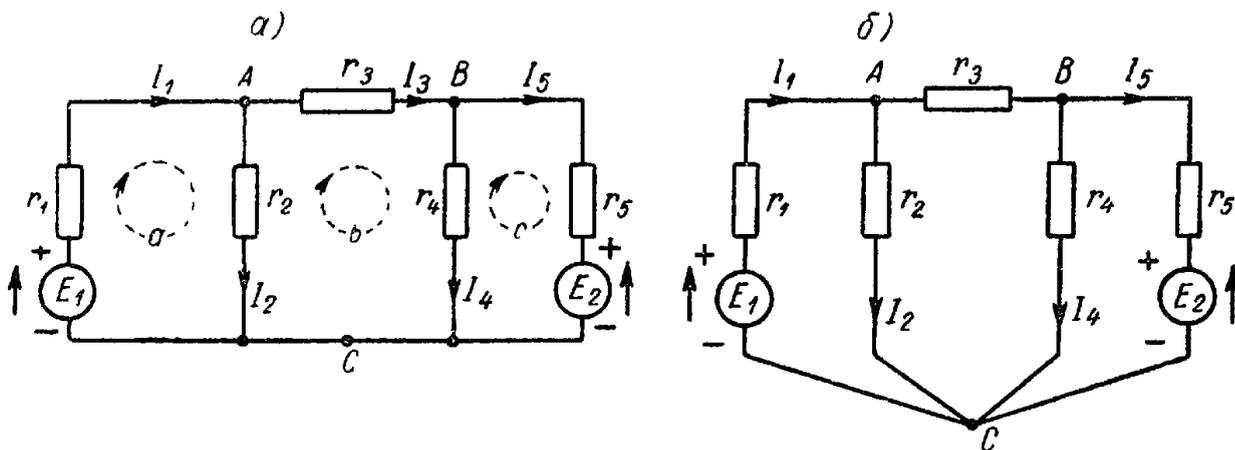
Метод рівнянь Кірхгофа універсальний і часто використовується особливо коли потребується скласти диференціальне рівняння, для аналізу перехідних процесів в ланцюгах, в теорії автогенераторів і т.і.

Метод контурних струмів зручний при аналізі кіл, складених з двох контурів, наприклад, трансформаторів, для одержання еквівалентних схем заміщення таких кіл.

### Метод вузлових напруг

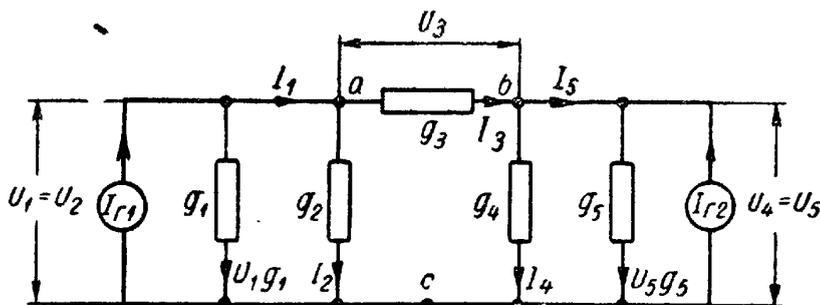
Метод вузлових напруг базується на використанні першого закону Кірхгофа та закону Ома або другого закону Кірхгофа.

Сутність методу розглянемо на прикладі ЕК, який використовувався на минулій лекції.



## Рисунок

По-перше, перетворимо генератори ЕРС в схемі у генератори струму, вважаючи що  $r_1 = \frac{1}{g_1}, r_5 = \frac{1}{g_5}$  є внутрішніми опорами генераторів. Всі опори, які входять в схему, виразимо через відповідні провідності. Літерами  $a, b, c$  позначимо тепер вузли схеми. В результаті отримаємо схему як на рисунку нижче, в якій струм першого генератора струму  $I_{r1} = E_1 g_1$  та струм другого генератора  $I_{r2} = E_2 g_5$ .



Рисунок

Всі напруги (різниці потенціалів), які діють в колі, будемо визначати відносно потенціалу одного з вузлів, наприклад, вузла  $c$ , який назвемо **опорним** і потенціал якого будемо вважати нульовим.

Згідно з методом вузлових напруг введемо деякі нові поняття.

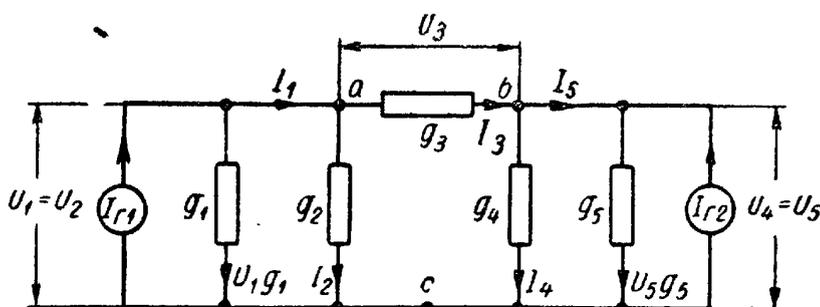
**Вузловими напругами** називають потенціали (напруги) відносно опорного вузла. В нашій схемі є дві вузлові напруги:  $U_a$  та  $U_b$ . Дійсні напруги на затискачах гілок співпадають з вузловими тільки для зовнішніх гілок (підключених до опорного вузла). Як видно з нашої схеми

$$U_1 = U_2 = U_a,$$

$$U_4 = U_5 = U_b.$$

Що стосується напруг на гілках, ввімкнених між вузлами, то вони виражаються через вузлові напруги. В нашій схемі є одна така гілка –  $g_3$ . Напруга

$$U_3 = U_a - U_b.$$



Рисунок

Знаючи струми джерел струму та напруги на гілках, можна безпосередньо знайти всі струми. Дійсно

$$\begin{aligned}
I_1 &= I_{e1} - U_1 g_1 = I_{e1} - U_a g_1, \\
I_2 &= U_2 g_2 = U_a g_2, \\
I_3 &= U_3 g_3 = (U_a - U_b) g_3, \\
I_4 &= U_4 g_4 = U_b g_4, \\
I_5 &= U_5 g_5 - I_{e2} = U_b g_5 - I_{e2}.
\end{aligned}$$

Таким чином, замість знаходження п'яти струмів у всіх гілках, можна поставити задачу знаходження всього лише двох вузлових напруг:  $U_a$  та  $U_b$ . Після цього напруги на всіх гілках та струми через них можна легко визначити.

Ще одне поняття, яке нам необхідно в методі вузлових напруг – **вузлова провідність**. Це сума провідностей, які сходяться у кожному (за виключенням опорного) вузлах. В нашій схемі є такі дві вузлові провідності:

$$g_a = g_1 + g_2 + g_3 \quad \text{та} \quad g_b = g_3 + g_4 + g_5.$$

**Взаємними провідностями** називають провідності, ввімкнені між двома сусідніми (за виключенням опорного) вузлами. В нашій схемі є тільки одна взаємна провідність

$$g_{ab} = g_3.$$

Тепер рівняння першого закону Кірхгофа для вузлу  $a$  можна записати так:

$$I_{e1} - U_a g_1 - U_a g_2 - (U_a - U_b) g_3 = 0$$

або через вузлові та взаємні провідності

$$U_a g_a - U_b g_{ab} = I_{e1}.$$

Рівняння для вузлу  $b$  в нових величинах має вигляд

$$I_{e2} - U_b g_5 - U_b g_4 + (U_a - U_b) g_3 = 0$$

або

$$U_b g_b - U_a g_{ab} = I_{e2}.$$

Згідно з методом рівнянь Кірхгофа рівняння для вузлів мали вигляд:

- для 1-го вузла (вузол А):  $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ ;

- для 2-го вузла (вузол В):  $I_3 - I_4 - I_5 = 0$ ;

$$\left\{ \begin{aligned}
U_a g_a - U_b g_{ab} &= I_{e1} \\
U_b g_b - U_a g_{ab} &= I_{e2}.
\end{aligned} \right.$$

Таким чином, згідно з методом вузлових напруг, отримуємо систему з двох незалежних рівнянь, з яких знаходяться шукані вузлові напруги  $U_a$  та  $U_b$ . Замість системи з п'ятьох рівнянь маємо розв'язувати тільки з двох.

Тепер можемо **сформулювати загальне правило** складання кожного з рівнянь методу вузлових напруг. При відліку напруг всіх вузлів відносно опорного вузла в лівій частині рівняння для даного вузла складаються: із знаком «плюс» – добутки вузлової напруги на вузлову провідність та із знаком «мінус» – добутки вузлових напруг суміжних вузлів на відповідні взаємні провідності. В правій частині рівняння записується алгебраїчна сума струмів джерел струмів, підключених до вузла.

Причому струми, які втікають у вузол, беремо зі знаком «плюс», а ті, що витікають з вузла, – з «мінусом».

В загальному вигляді система рівнянь методу вузлових напруг може бути записана так:

$$\begin{cases} U_a g - U_a g - U_a g - \dots = \sum I \\ U_b g_{bb} - U g_{bc} - U g - \dots = \sum I \\ \dots \end{cases}$$

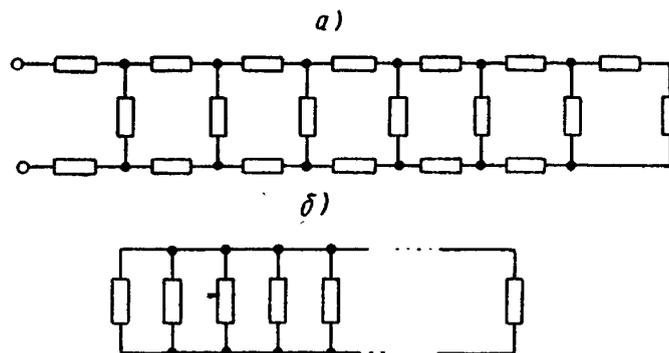
Число рівнянь системи, вочевидь, на одиницю менше ніж кількість вузлів:  
 $p = n - 1$  (  $P$  – кількість вузлів,  $3 - 1 = 2$  ).

Тобто різниця між двома методами тільки в тому, що в одному розглядають контурні струми та опори, а в іншому – вузлові напруги та провідності, а сума ЕРС, ввімкнених в контур, замінюється сумою струмів, підключених до вузла.

Доцільність використання того чи іншого методу визначається кількістю рівнянь, які необхідно розв'язати. Якщо коло містить велику кількість контурів при невеликій кількості вузлів, то зручніше проводити розрахунки за методом вузлових напруг. При цьому всі джерела енергії мають бути замінені еквівалентними схемами з генераторами струму.

Якщо ж схема містить відносно невелику кількість незалежних контурів, доцільно застосовувати метод контурних струмів. При цьому всі джерела енергії мають бути представлені еквівалентними схемами з генераторами ЕРС.

Роздивимося, наприклад дві схеми на рисунку нижче.



Рисунок

В схемі а), де 7 контурів та 11 незалежних вузлів, раціонально застосувати метод контурних струмів, а в схемі б) є тільки два вузли та велика кількість паралельних гілок, – метод вузлових напруг.

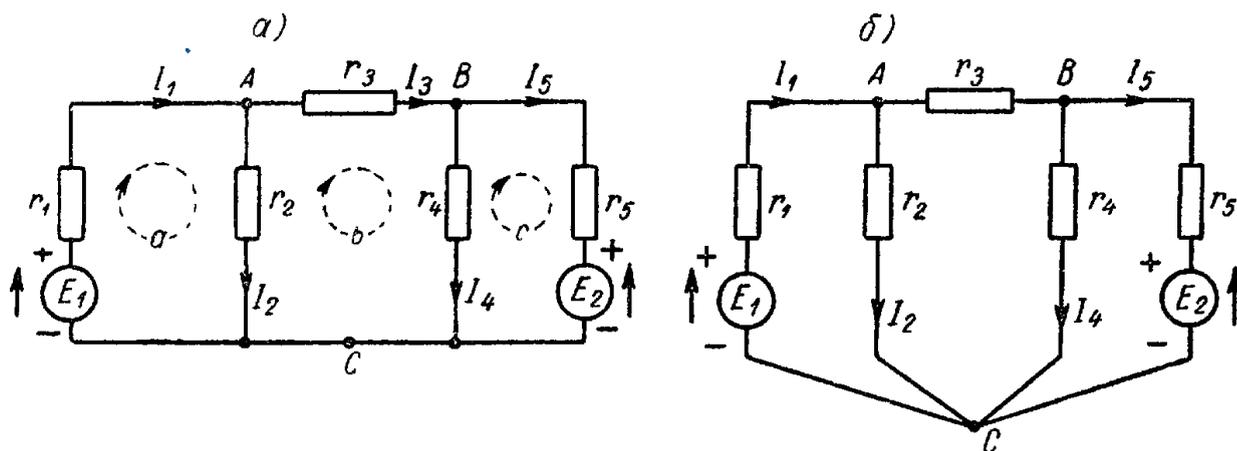
## Розрахунок складних ланцюгів змінного струму Особливості розрахунку складних кіл

Ланцюг змінного струму може представляти складну систему, що складається в загальному випадку з кількох джерел гармонійних коливань однакової частоти та ряду пасивних елементів – опорів та реактивностей (позитивних – індуктивностей, негативних – ємностей).

Основне завдання розрахунку складного ланцюга змінного струму – знаходження при заданому впливі всіх відгуків, тобто визначення амплітуд і початкових фаз струмів і напруг на всіх ділянках кола.

Завдяки символічному методу всі основні кількісні співвідношення, що визначають режим ланцюгів при гармонійних коливаннях, мають вигляд аналогічних

виразів для ланцюга постійного струму. Тільки замість речових величин ми оперуємо у разі змінного струму комплексними величинами.



Закони Кірхгофа в комплексній формі для ланцюга змінного струму аналогічні законам для постійного струму

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0$$

де N – кількість гілок, що сходяться у вузол.

І другий закон Кірхгофа:

$$\sum_{i=1}^N I_i Z_i = \sum_{k=1}^K E_k$$

Але! Важливо пам'ятати особливості, пов'язані з розрахунком ланцюгів змінного струму:

1. Усі розрахунки виконуються для комплексних амплітуд напруг (ЕРС) та струмів. Результат отримаємо також у вигляді комплексних амплітуд шуканих відгуків.

2. Опори, що мають комплексний характер, можуть бути різними (активними, реактивними). Це слід враховувати.

3. Напрями змінних напруг (ЕРС) і струмів змінюються безліч разів на секунду - стрілки мають умовний характер!