



**Universidad de
Castilla-La Mancha**

**Prueba de acceso a la Universidad
Curso 2024/2025**

Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los ejercicios 3 y 4 deberá contestar solamente a UNO de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.

Solo están permitidas las calculadoras de tipo 1 y 2. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos.

Duración de la prueba: 90 minutos.

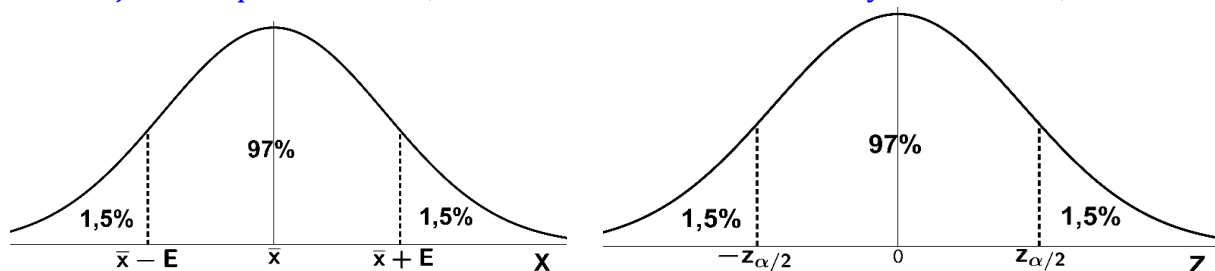
Ejercicio 1.- Una empresa envasa zumos en botellas de 1 litro. La cantidad de zumo que la máquina embotelladora inyecta en cada botella sigue una distribución normal con una desviación típica $\sigma = 0,05$ litros. Se toma una muestra aleatoria de 16 botellas y se observa que el contenido medio es de 0,97 litros. Con un nivel de confianza del 97%,

- Calcula el intervalo de confianza para el contenido medio poblacional de una botella. (1 punto)
- Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. (0,75 puntos)
- Dado el intervalo del apartado a), ¿se puede aceptar que el contenido medio poblacional es de 1 litro con un nivel de confianza del 95%? Justificar la respuesta. (0,75 puntos)

Resolución

X = cantidad de zumo, en litros, $X \rightarrow N(\mu, 0,05)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza del 97% para estimar la cantidad media, μ , es $I_c = (\bar{x} - E, \bar{x} + E)$, siendo $\bar{x} = 0,97$ litros la media de la muestra de tamaño $n = 16$, $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

Como el área bajo la campana es 100%, entonces $100\% - 97\% = 3\%$ y $3\% : 2 = 1,5\%$



$z_{\alpha/2}$ es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = 97\% + 1,5\% = 98,5\% = 0,985$

Esta probabilidad coincide con $\frac{1 + n_c}{2} = \frac{1 + 0,97}{2} = 0,985$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,985$ usando la tabla de la $N(0, 1) \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$.

a) $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \cdot \frac{0,05}{\sqrt{16}} \cong 0,0271$; $I_c = (0,97 - 0,0271 ; 0,97 + 0,0271) \cong (0,9429 ; 0,9971)$

b) Si queremos reducir la amplitud, $A = 2E$, tendremos que reducir el error y como debemos mantener el nivel de confianza, σ y $z_{\alpha/2}$ no varían. Luego, debemos aumentar el tamaño muestral n

(0,75 puntos)

$$k=1, f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4, & \text{si } x \leq 1 \\ -2x^2 + 8x, & \text{si } x > 1 \end{cases}, f'(x) = \begin{cases} 4x, & \text{si } x \leq 1 \\ -4x + 8, & \text{si } x > 1 \end{cases}, \\ f''(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x < 1 \\ -4, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b.1) Encuentra el valor de los parámetros a , b y c . (1,5 puntos)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 3 \quad ; \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad ; \quad f''(x) = 6ax + 2b$$
$$\{f''(1) = 0 \mid f(1) = -14\} \Rightarrow \{6a + 2b = 0 \mid a^3 + b^2 + c - 3 = -14\} \Rightarrow \{6a + 2b = 0 \mid a + b + c = -11\}$$
$$\{f'(-1) = 0 \mid f(-1) = 2\} \Rightarrow \{3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0 \mid a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) - 3 = 2\} \Rightarrow \{3a -$$
$$\begin{aligned} \{6(b - c - 5) + 2b = 0 \quad b - c - 5 + b + c = -11 \\ 3(b - c - 5) - 2b + c = 0 \end{aligned}$$
$$\{8b - 6c = 30 \quad 2b = -6 \Rightarrow b = -3 \quad b - 2c = 15 \Rightarrow \{8(-3) - 6c = 30 \Rightarrow 6c = -54 \Rightarrow c = -9 \quad -3 - 2c = 15 \Rightarrow -2c = 18 \Rightarrow c = -9\}$$

ecuación matricial $CX = AB + X$. (1 punto)

Trasponiendo términos $CX - X = CX - IX = AB$; sacando factor común, $(C - I)X = AB$

Si $D = C - I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ queda $DX = AB$. Como $\det D = 2 \neq 0$, existe D^{-1}

Multiplicando por D^{-1} , por la izquierda, $D^{-1}DX = IX = X = D^{-1}AB$

$$X = \frac{1}{\det \det D} (\text{adj } D)^t AB = \frac{1}{2} (1 \ 0 \ -2 \ 2)^t (1 \ 0 \ 2 \ 2 \ -1 \ 0) (1 \ 2 \ 0 \ 3 \ 2 \ -1) = \frac{1}{2} (1 \ -2 \ 0 \ 2) (5 \ 0 \ 2 \ 12) = -$$

O sea, $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -12 \ 2 \ 12 \end{pmatrix}$

Apartado a) En un examen de matemáticas se propone el siguiente problema:

“Indica el punto donde la función $F(x, y) = 6x + 3y - 2$, alcanza el mínimo en la región determinada por las siguientes restricciones: $2x + y \geq 6$; $2x + 5y \leq 30$; $2x - y \leq 6$ ”

Laura responde que el mínimo de la función se alcanza en el punto $(1, 2)$ y Jesús, por el contrario, que lo hace en el punto $(3, 0)$.

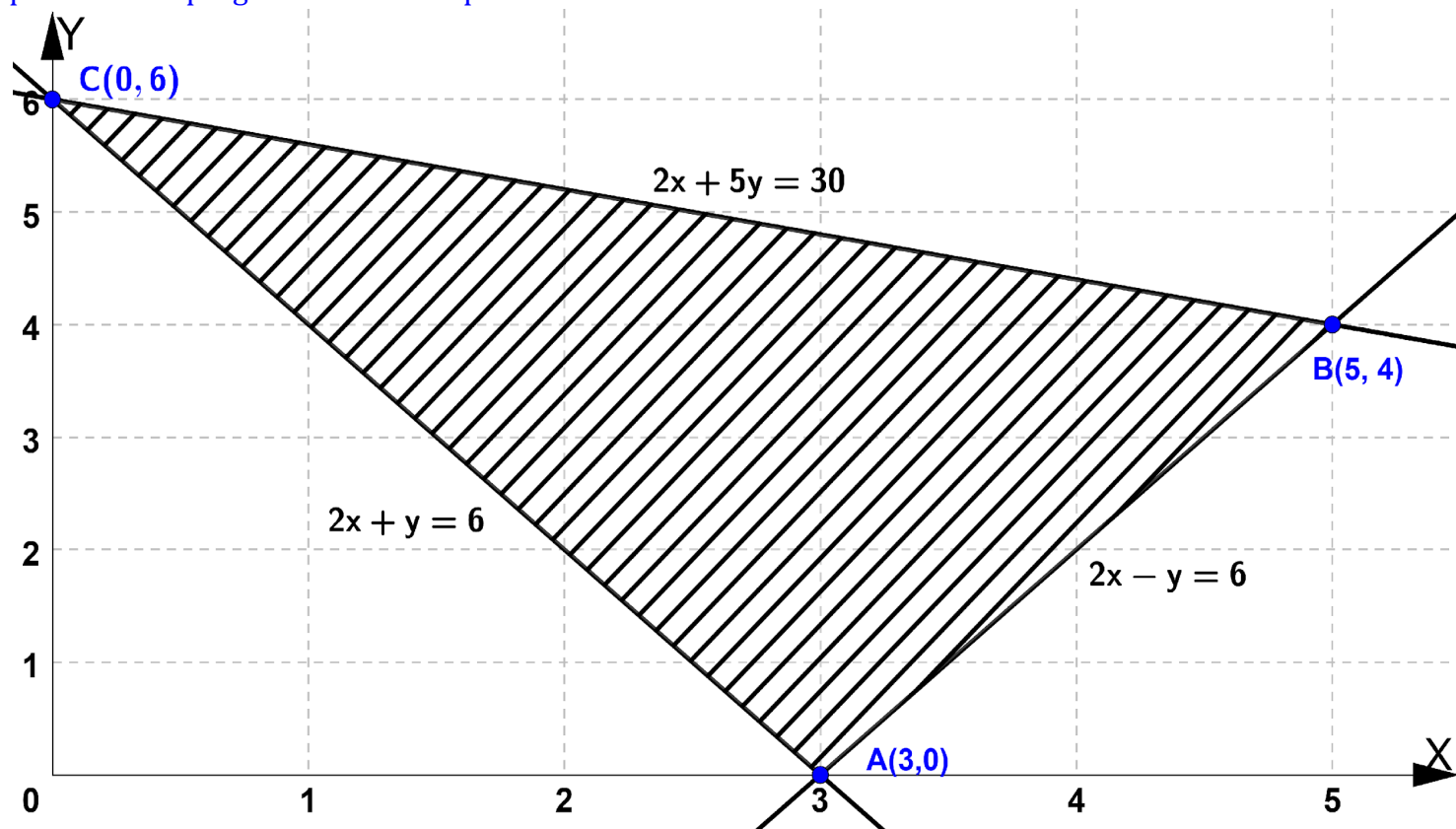
a.1) ¿Es exacta la respuesta de Laura? Razona tu respuesta. (1,25 puntos)

a.2) ¿Es cierto que el mínimo se alcanza en el punto $(3, 0)$? Razona tu respuesta. (0,75 puntos)

a.3) ¿Cuánto vale dicho mínimo? (0,5 puntos)

Resolución

Dibujamos los ejes de coordenadas, hacemos la escala adecuada y dibujamos el recinto solución del problema de programación lineal planteado en el enunciado:



Veamos en qué vértice(s) alcanza el valor mínimo $F(x, y) = 6x + 3y - 2$:

$$f(A) = f(3, 0) = 6 \cdot 3 + 3 \cdot 0 - 2 = 16 \quad f(B) = f(5, 4) = 6 \cdot 5 + 3 \cdot 4 - 2 = 40 \quad f(C) = f(0, 6) = 6 \cdot 0 + 3 \cdot 6 - 2 = 16$$

El valor mínimo es 16 y se alcanza en $A(3, 0)$ y $C(0,6)$ y en todo el segmento AC

a.1) La respuesta de Laura no es correcta a.2) La respuesta es incompleta a.3) El valor mínimo es 16

Apartado b) La compañía de seguros SEGURVIDA utiliza tres bufetes de abogados para resolver sus casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30% de los casos legales y gana en los tribunales

el 60% de los casos presentados. El bufete B recibe el 50% de los casos legales y gana el 80% de los casos presentados y el bufete C recibe el resto de los casos y gana el 70% de los presentados.

Se elige al azar uno de los casos que ha llegado a los tribunales y ya ha sido resuelto. Se pide, de forma razonada:

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía haya ganado el caso? (0,75 puntos)

b.2) Si el caso elegido se ha perdido, calcula la probabilidad de que haya sido defendido por el bufete A. (0,5 puntos)

Resolución

A = ser defendido por el bufete A B = ser defendido por el bufete B

C = ser defendido por el bufete C D = ganar el caso. Según el enunciado, $p(A) = 0,3$ $p(B) = 0,5$

$p(C) = 1 - 0,3 - 0,5 = 0,2$ $p(D/A) = 0,6$ $p(D/B) = 0,8$ $p(D/C) = 0,7$

b.1) Se pide $p(D)$, que usando el teorema de probabilidad total es

$$p(D) = p(A)p(D/A) + p(B)p(D/B) + p(C)p(D/C) = 0,3 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,72 = 72\%$$

$$b.2) \text{ Nos piden } p\left(\frac{A}{D^c}\right) = \frac{p(A \cap D^c)}{p(D^c)} = \frac{p(A)p(D^c/A)}{p(D^c)} = \frac{p(A)[1 - p(D/A)]}{1 - p(D)} = \frac{0,3 \cdot (1 - 0,6)}{1 - 0,72} = \frac{0,12}{0,28} \cong 42,86\%$$

b.3) Si el precio por acción de la compañía de seguros sigue una función de la forma

$A(t) = at^3 - 12t^2 + bt$, donde t = tiempo en horas transcurridas desde el inicio, alcanza un máximo en la tercera hora $t = 3$, alcanzando un valor de 54 € la acción en ese instante, encuentra el valor de los parámetros a y b . (1,25 puntos)

Resolución

$$A(t) = at^3 - 12t^2 + bt \quad ; \quad A'(t) = 3at^2 - 24t + b$$

Punto máximo (3, 54) $\Rightarrow$

$$\{A'(3) = 0 \quad A(3) = 54 \Rightarrow \{3a3^2 - 24 \cdot 3 + b = 0 \quad a3^3 - 12 \cdot 3^2 + b \cdot 3 = 54 \Rightarrow \{27a + b = 72 \quad 27a + 3b = 108$$

Restando las ecuaciones, $2b = 90$, $b = 45$. Sustituyendo, $27a + 45 = 72$, $27a = 27$, $a = 1$

Conclusión: $a = 1$, $b = 45$ y $A(t) = t^3 - 12t^2 + 45t$