

Вариант 1

Часть В

Задача В1. Витя купил в магазине некоторое количество тетрадей, заплатив за них 24 тысячи рублей. Затем он обнаружил, что в другом магазине тетрадь стоит на 1 тысячу рублей меньше, поэтому, заплатив такую же сумму, он мог бы купить на 2 тетради больше. Сколько тетрадей купил Витя?

Решение.

Пусть x – количество тетрадей, купленных Витей.

Тогда цена одной тетради: $\frac{24}{x}$ тыс. руб.

Значит, в другом магазине цена одной тетради: $\frac{24}{x} - 1$, так как тетради здесь дешевле на 1 тысячу рублей.

Так как в другом магазине Витя купил на 2 тетради больше за те же деньги, то

$\left(\frac{24}{x} - 1\right)(x + 2) = 24$, то есть мы умножили новую цену на новое количество тетрадей и получили ту же самую сумму в 24 тысячи.

Решаем полученное уравнение:

$$\begin{aligned}\left(\frac{24}{x} - 1\right)(x + 2) &= 24, \\ 24 + \frac{48}{x} - x - 2 &= 24, \\ \frac{48}{x} - x &= 2, \\ 48 - x^2 &= 2x, \\ x^2 + 2x - 48 &= 0, \\ \frac{D}{2} = 1 + 48 = 49; \sqrt{\frac{D}{2}} &= 7, \\ x_1 = \frac{-1-7}{1} = -8; x_2 = \frac{-1+7}{1} &= 6.\end{aligned}$$

Отрицательный корень не подходит, так как количество тетрадей должно быть положительным.

Таким образом, Витя купил 6 тетрадей.

Ответ: 6.

Задача В2. Найти наибольшее целое решение неравенства $3^{x+17} \cdot 5^{-x-16} > 1,08$.

Решение.

Преобразуем неравенство таким образом, чтобы привести левую часть к одному основанию:

$$3^{x+17} \cdot 5^{-x-16} > 1,08,$$

$$3^{x+17} \cdot 5^{-x-17+1} > \frac{27}{25},$$

$$3^{x+17} \cdot 5^{-(x+17)} \cdot 5 > \frac{27}{25},$$

$$\frac{3^{x+17}}{5^{x+17}} > \frac{27}{125},$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+17} > \left(\frac{3}{5}\right)^3.$$

Так как основание под степенью меньше 1, то последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$x + 17 < 3,$$

$$x < -14.$$

Наибольшее целое число из этого множества — это -15.

Ответ: -15.

Задача В3. Найдите модуль разности наибольшего и наименьшего корней уравнения $(2x^2 - x - 7)^2 = (5x + 1)^2$.

Решение.

Перенесем все слагаемые в левую часть и применим формулу разности квадратов:

$$\begin{aligned}(2x^2 - x - 7)^2 &= (5x + 1)^2, \\(2x^2 - x - 7)^2 - (5x + 1)^2 &= 0, \\(2x^2 - x - 7 - 5x - 1)(2x^2 - x - 7 + 5x + 1) &= 0, \\(2x^2 - 6x - 8)(2x^2 + 4x - 6) &= 0, \\(x^2 - 3x - 4)(x^2 + 2x - 3) &= 0, \\(x - 4)(x + 1)(x + 3)(x - 1) &= 0.\end{aligned}$$

Корни полученного уравнения: -3, -1, 1, 4.

Наибольший корень 4, а наименьший -3. Их разность равна $4 - (-3) = 7$.

Ответ: 7

Примечание: разложение квадратных трехчленов на множители подробно не расписывалось, так как предполагается, что решающим часть В это по силам. Если остались вопросы, то пишите комментарии в конце статьи – с удовольствием ответим на них.

Задача В4. Пусть (x_1, y_1) , (x_2, y_2) — решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4x = 15 + 3y, \\ 4x - 3y = 6. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $x_1y_2 + x_2y_1$.

Решение.

Будем решать данную систему уравнений методом подстановки:

$$\begin{aligned}\begin{cases} x^2 + 4x = 15 + 3y, \\ 4x - 3y = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 4x = 15 + 4x - 6, \\ 3y = 4x - 6; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 = 9, \\ 3y = 4x - 6; \end{cases}\end{aligned}$$

Из уравнения $x^2 = 9$ следует, что $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

При $x_1 = -3$ получаем

$$3y = 4 \cdot (-3) - 6;$$

$$3y = -18,$$

$$y_1 = -6.$$

При $x_2 = 3$ получаем

$$3y = 4 \cdot 3 - 6;$$

$$3y = 6,$$

$$y_2 = 2.$$

Тогда значение искомого выражения:

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 = -3 \cdot 2 + 3 \cdot (-6) = -6 - 18 = -24.$$

Ответ: -24.

Задача В5. Найдите сумму корней (корень, если он единственный) уравнения

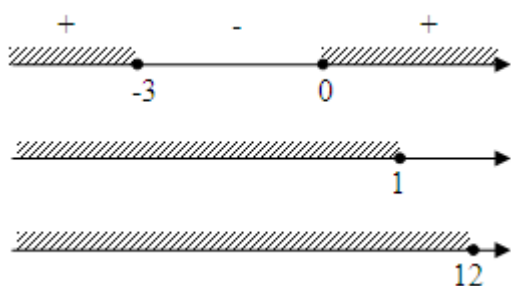
$$\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{1 - x} = \sqrt{12 - x} + \sqrt{1 - x}$$

Решение.

Сначала определим ОДЗ для x . Для этого составим систему неравенств, руководствуясь тем, что подкоренные выражения должны быть неотрицательными:

$$\begin{cases} x^2 + 3x \geq 0, \\ 1 - x \geq 0, \\ 12 - x \geq 0, \\ \begin{cases} x(x + 3) \geq 0 \\ x \leq 1, \\ x \leq 12. \end{cases} \end{cases}$$

Первое неравенство системы решаем методом интервалов:



На рисунке изображены множества решений каждого из трех неравенств системы. Изобразим пересечение этих промежутков:



Таким образом, $x \in (-\infty; -3] \cup [0; 1]$

Теперь приступаем к преобразованию исходного уравнения. Так как ОДЗ найдена, то можно смело проводить любые алгебраические преобразования с уравнением, не боясь появления посторонних корней (главное не забыть проверить полученные корни на принадлежность ОДЗ).

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{1 - x} &= \sqrt{12 - x} + \sqrt{1 - x}, \\ \sqrt{x^2 + 3x} &= \sqrt{12 - x}.\end{aligned}$$

Казалось бы, одинаковые слагаемые в правой и левой части можно было убрать сразу, однако, это нельзя делать, так как наличие корня $\sqrt{1 - x}$ влияет на ОДЗ уравнения.

Далее

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 3x} &= \sqrt{12 - x}, \\ x^2 + 3x &= 12 - x, \\ x^2 + 4x - 12 &= 0, \\ D &= 4^2 + 4 \cdot 12 = 16 + 48 = 64, \sqrt{D} = 8, \\ x_1 &= \frac{-4 - 8}{2} = -6; \quad x_2 = \frac{-4 + 8}{2} = 2.\end{aligned}$$

Второй корень не удовлетворяет ОДЗ, поэтому исходное уравнение имеет единственный корень -6.

Ответ: -6.

Задача В6. Найдите сумму целых решений неравенства

$$\frac{(x^2 + 7x + 10)(x - 4)^2}{4 - x^2} \geq 0.$$

Решение.

Данное неравенство удобно решать, используя метод интервалов. Для этого преобразуем исходное неравенство:

$$\frac{(x^2 + 7x + 10)(x - 4)^2}{4 - x^2} \geq 0,$$

$$\frac{(x^2 + 7x + 10)(x - 4)^2}{-(x^2 - 4)} \geq 0,$$

$$\frac{(x^2 + 7x + 10)(x - 4)^2}{x^2 - 4} \leq 0.$$

Заметьте, что, умножая на -1 левую и правую части неравенства, мы поменяли знак неравенства.

Далее разложим квадратный трехчлен в числителе на множители:

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5),$$

а в знаменателе применим формулу разности квадратов:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Тогда неравенство принимает вид

$$\frac{(x + 2)(x + 5)(x - 4)^2}{(x - 2)(x + 2)} \leq 0.$$

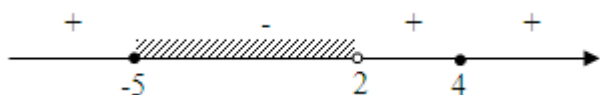
Все это были обычные шаги, необходимые для преобразования неравенства к виду, пригодному для применения метода интервалов.

Теперь внимание! Не спешите сокращать $(x+2)$ в числителе и знаменателе. Так вы упустите из виду, что x не может быть равен -2 . Перед сокращением необходимо пометить, что $x \neq -2$.

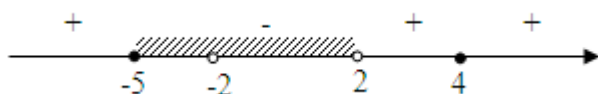
Итак, рассматриваем неравенство

$$\frac{(x+5)(x-4)^2}{(x-2)} \leq 0.$$

Расставляем нули числителя и знаменателя на числовой прямой, а также знаки неравенства, используя чередование знаков: начинаем со знака «+», а проходя через точку $x = 4$, знак не меняем.



Теперь наносим на полученную область решений выколотую точку $x = -2$ (на чередование знаков эта точка не влияет)



По полученной схеме записываем решение неравенства

$$x \in [-5; -2) \cup (-2; 2) \cup \{4\}.$$

Обратите внимание, что число 4 само по себе является решением неравенства, поэтому включается в множество решений.

Из записанного множества выписываем все целые решения: $-5; -4; -3; -1; 0; 1; 4$.

Их сумма равна -8 .

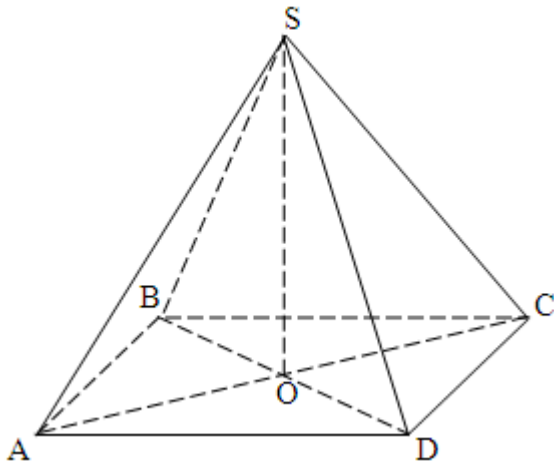
Ответ: -8 .

Задача В7. Каждое боковое ребро четырехугольной пирамиды образует с ее высотой, равной $3\sqrt{7}$, угол 30° . Основанием пирамиды является

прямоугольник с углом 30° между диагоналями. Найдите объем пирамиды V , в ответ запишите значение выражения $\sqrt{7} \cdot V$.

Решение.

Пусть $SABCD$ – данная пирамида, а SO – ее высота.



Рассмотрим треугольники SAO , SBO , SCO и SDO . Эти треугольники прямоугольные, так как SO – высота пирамиды, а значит, перпендикулярна любой прямой в плоскости (ABC) . Катет SO – общий для всех четырех треугольников, а углы при вершине S у этих треугольников одинаковы по условию. Это значит, что указанные треугольники равны, а значит $OA=OB=OC=OD$. Таким образом, точка O равноудалена от вершин прямоугольника $ABCD$, то есть является точкой пересечения диагоналей прямоугольника.

Для нахождения объема пирамиды применим формулу:

$V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} H$, где S_{ABCD} – площадь основания, а $H=SO$ – высота пирамиды.

По условию задачи $H = 3\sqrt{7}$.

Площадь основания можно найти по формуле площади четырех угольника:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$, где $d_1 = d_2$ – диагонали прямоугольника, а $\varphi = 30^\circ$ – угол между диагоналями.

Найдем половину диагонали прямоугольника. Для этого рассмотрим, например, треугольник SOA, для которого $SO = 3\sqrt{7}$, $\angle ASO = 30^\circ$.

Тогда

$$AO = SO \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 3\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{21}$$

Значит диагонали прямоугольника

$$d_1 = d_2 = 2\sqrt{21}.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} 2\sqrt{21} \cdot 2\sqrt{21} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} 2\sqrt{21} \cdot 2\sqrt{21} \cdot \frac{1}{2} = 21.$$

Вычисляем объем пирамиды:

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot 21 \cdot 3\sqrt{7} = 21\sqrt{7}.$$

В ответ записываем число $\sqrt{7}V_{SABCD} = \sqrt{7} \cdot 21\sqrt{7} = 21 \cdot 7 = 147$

Ответ: 147.

Задача В8. Найдите (в градусах) наибольший отрицательный корень

уравнения $\sin^2 \left(5x - \frac{\pi}{3} \right) = 1$.

Решение.

Проще всего решить данную задачу можно, используя основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = 1,$$

$$\sin^2\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin^2\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(5x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\cos^2\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = 0,$$

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

$$5x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что при $n = 0$ соответствующий корень $x_{n=0} = \frac{\pi}{6}$ —
положительный, а уже при $n = -1$ получим $x_{n=-1} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{30} = -6^\circ$.

Это и есть наибольший из отрицательных корней.

Ответ: -6

Задача В9. Найдите количество корней уравнения $\sin x = \frac{-x}{16\pi}$.

Решение.

Очень похожая задача была в тесте за [2014 г. под номером В8](#).

Решить это уравнение аналитически невозможно, так как оно относится к классу трансцендентных уравнений. Однако для определения количества корней решение искать вовсе необязательно. Достаточно решить данное уравнение графически, то есть изобразить на координатной плоскости

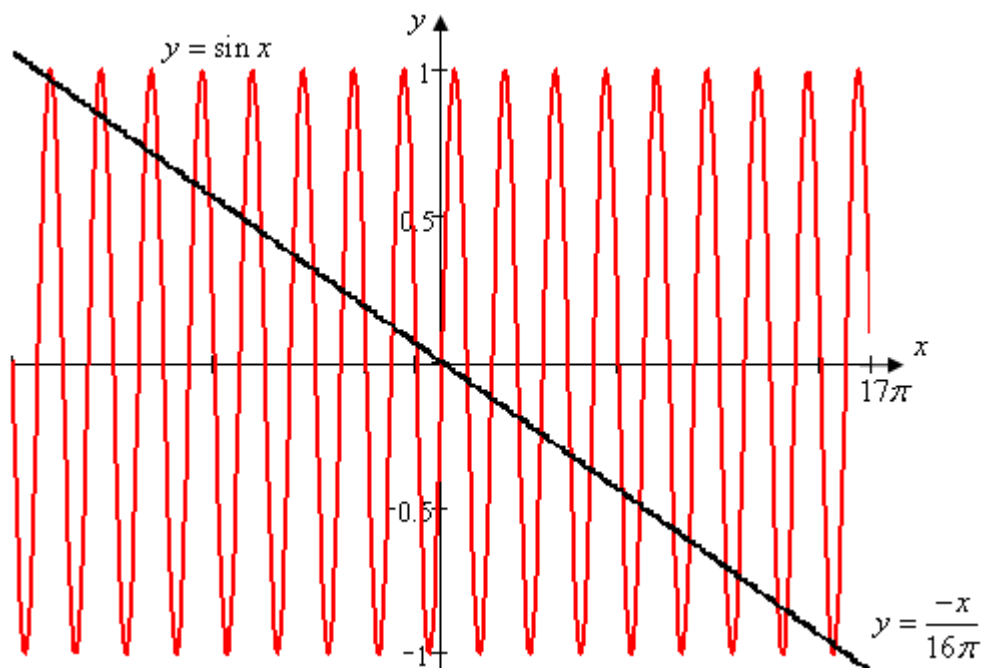
функции $y = \sin x$ и $y = \frac{-x}{16\pi}$, найти точки их пересечения и подсчитать количество этих точек.

Функция $y = \sin x$ — 2π -периодическая функция, кроме того, значения этой функции лежат в интервале $y \in [-1; 1]$. В точке $x = 0$ функция принимает значение $y = 0$. Этого, в принципе, достаточно для построения схематического графика этой функции.

Функция $y = \frac{-x}{16\pi}$ на координатной плоскости определяет прямую, проходящую через начало координат с отрицательным наклоном к оси абсцисс.:

Строим графики указанных функций в одной координатной плоскости:

Очевидно, что при $x > 16\pi$ и при $x < -16\pi$, точек пересечения у графиков функций точно не будет, так как при указанных значениях x , значения функции $y = \frac{-x}{16\pi}$ по модулю превышают 1.



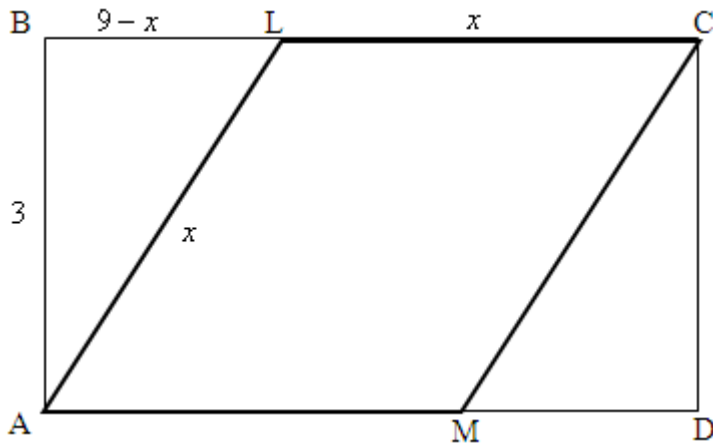
Как видно из графика, заданные функции имеют 33 точки пересечения. Заметим, что задачу можно было решить, рассматривая лишь значения $x \geq 0$, так как функции, входящие в состав уравнения нечетные, а значит, их графики симметричны относительно начала координат.

Ответ: 33.

Задача В10. В прямоугольнике **ABCD** выбраны точки L на стороне BC и M на стороне AD так, что **ALCM** – ромб. Найдите площадь этого ромба, если $AB=3$, $BC=9$.

Решение.

Изобразим на чертеже описанный прямоугольник и обозначим на его сторонах точки L и M.



Пусть $LC=x$ – сторона ромба, тогда $AL=x$, так как у ромба все стороны равны.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABL . У этого треугольника $AB=3$, $BL=9-x$, $AL=x$.

Запишем для этого треугольника теорему Пифагора:

$$\begin{aligned}3^2 + (9-x)^2 &= x^2, \\9 + 81 - 18x + x^2 &= x^2, \\18x &= 90, \\x &= 5.\end{aligned}$$

Таким образом, сторона ромба равна 5.

Высота ромба $CD=BA=3$

Тогда площадь ромба:

$$S = 3 \cdot 5 = 15$$

Ответ: 15.

Задача В11. Пусть $A = (\log_2 15 + \log_{15} 2 - 2)^{0.5} \cdot (\log_{7.5} 15 \cdot \log_2^{0.5} 15 - \log_2^{1.5} 15) + 4 \log_4^2 15$.

Найдите значения выражения 2^A .

Решение.

Преобразуем выражение, задающее A.

Сначала заметим, что $\log_2 15 = \frac{1}{\log_{15} 2}$, а это значит, что $\log_2 15 \cdot \log_{15} 2 = 1$.

Тогда

$$\begin{aligned} \log_2 15 + \log_{15} 2 - 2 &= \left(\sqrt{\log_2 15}\right)^2 + \left(\sqrt{\log_{15} 2}\right)^2 - 2\sqrt{\log_2 15} \cdot \sqrt{\log_{15} 2} = \\ &= \left(\sqrt{\log_2 15} - \sqrt{\log_{15} 2}\right)^2 = \left(\log_2^{0.5} 15 - \log_{15}^{0.5} 2\right)^2 \end{aligned}$$

Здесь мы использовали формулу квадрата разности, а сначала сделали из двойки удвоенное произведение логарифмов, пользуясь замеченным выше свойством.

Далее

$$(\log_2 15 + \log_{15} 2 - 2)^{0.5} = \left(\left(\log_2^{0.5} 15 - \log_{15}^{0.5} 2\right)^2\right)^{0.5} = \left|\log_2^{0.5} 15 - \log_{15}^{0.5} 2\right| = \log_2^{0.5} 15 - \log_{15}^{0.5} 2$$

При раскрытии модуля в последнем выражении мы учли, что $\log_2 15 > 1$, а $\log_{15} 2 < 1$, поэтому разность под модулем положительная и знак модуля можно просто опустить.

Таким образом,

$$\begin{aligned} A &= (\log_2 15 + \log_{15} 2 - 2)^{0.5} \cdot (\log_{7.5} 15 \cdot \log_2^{0.5} 15 - \log_2^{1.5} 15) + 4 \log_4^2 15 = \\ &= (\log_2^{0.5} 15 - \log_{15}^{0.5} 2) \cdot (\log_{7.5} 15 \cdot \log_2^{0.5} 15 - \log_2^{1.5} 15) + 4 \log_4^2 15 = \\ &= (\log_2^{0.5} 15 - \log_{15}^{0.5} 2) \cdot \log_2^{0.5} 15 (\log_{7.5} 15 - \log_2 15) + 4 \log_4^2 15 = \\ &= (\log_2 15 - 1)(\log_{7.5} 15 - \log_2 15) + 4 \log_4^2 15 \end{aligned}$$

В последнем преобразовании мы внесли $\log_2^{0.5} 15$ в скобки слева и учли замеченное в самом начале свойство.

Далее, в первой скобке представим единицу как $1 = \log_2 2$ и воспользуемся формулой разности логарифмов:

$$\begin{aligned} A &= (\log_2 15 - \log_2 2)(\log_{7.5} 15 - \log_2 15) + 4\log_4^2 15 = \log_2 7.5(\log_{7.5} 15 - \log_2 15) + 4\log_4^2 15 = \\ &= \log_2 7.5 \cdot \log_{7.5} 15 - \log_2 7.5 \cdot \log_2 15 + 4\log_4^2 15 = \frac{1}{\log_{7.5} 2} \log_{7.5} 15 - \log_2 \frac{15}{2} \cdot \log_2 15 + 4\log_4^2 15 = \\ &= \log_2 15 - (\log_2 15 - \log_2 2) \cdot \log_2 15 + 4\log_4^2 15 = \log_2 15 - (\log_2 15 - 1) \cdot \log_2 15 + 4\log_4^2 15 = \\ &= \log_2 15 - \log_2^2 15 + \log_2 15 + 4\log_4^2 15 = 2\log_2 15 - \log_2^2 15 + 4\log_4^2 15 \end{aligned}$$

В последнем выражении учтем, что

$$\log_4 15 = \log_{2^2} 15 = \frac{1}{2} \log_2 15$$

Тогда

$$A = 2\log_2 15 - \log_2^2 15 + 4 \left(\frac{1}{2} \log_2 15 \right)^2 = 2\log_2 15 - \log_2^2 15 + \log_2^2 15 = 2\log_2 15 = \log_2 15^2 = \log_2 225$$

Вычисляем искомое выражение:

$$2^A = 2^{\log_2 225} = 225.$$

Ответ: 225.

Задача В12. Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые при делении на 4 и на 6 дают в остатке 1, при делении на 9 дают в остатке 4.

Решение.

Для того, чтобы решить задачу, нужно сначала найти какую-либо закономерность, которой подчиняются описанные в условии задачи числа, так как перебирать все трехзначные числа с указанными свойствами – не очень рациональная идея.

Для нахождения указанной закономерности заметим, что, например, числа, которые при делении на 4 дают в остатке 1 повторяются через 4, то есть образуют арифметическую прогрессию с разностью 4.

Действительно, число 5 при делении на 4 дает в остатке 1. Следующее такое число – 9, затем – 13, 17 и т.д.

Аналогично, числа которые при делении на 6 дают в остатке 1 повторяются через 6, например 13, 19, 25 и т.д.

А числа, которые при делении на 9 дают в остатке 4 повторяются через 9: 13, 22, 31 и т.д.

Теперь представим, что есть такое число, которое одновременно удовлетворяет всем трем свойствам, описанным в условии задачи, то есть при делении на 4 и на 6 дает в остатке 1, а при делении 9 дает в остатке 4. Одно из таких чисел, 13, очень просто находится методом подбора.

Если мы увеличим 13 на 4, то получим число 17. Это число будет при делении на 4 давать в остатке 1, однако остальные требования соблюдены не будут. Очевидно, что если мы увеличим число 13 на 36, то есть возьмем число 49, то это число будет обладать всеми свойствами, указанными в условии.

Число 36 одновременно делится на 4, на 6 и на 9, причем является наименьшим общим кратным этих чисел. Это значит, что все искомые числа образуют арифметическую прогрессию с разностью 36. Если за первый член такой прогрессии взять 13, то общий член можно записать в виде:

$$a_n = 13 + 36(n - 1) = 36n - 23$$

Так как число должно быть трехзначным, то

$$100 \leq 36n - 23 \leq 999,$$

$$123 \leq 36n \leq 1022,$$

$$\frac{123}{36} \leq n \leq \frac{1022}{36},$$

$$3\frac{5}{12} \leq n \leq 28\frac{7}{18}.$$

Так как n — целое число, то n изменяется от 4 до 28. При данных n все члены найденной прогрессии — трехзначные числа. Всего этих чисел 25 (от 4 до 28 включительно).

Найдем сумму членов арифметической прогрессии с 4го по 28й:

$$S_n = \frac{a_4 + a_{28}}{2} \cdot 25 = a_{16} \cdot 25 = (36 \cdot 16 - 23) \cdot 25 = 13825$$

Ответ: 13825.