Завдання гімназійної математичної олімпіади

5 клас

1(3 бали) Яка найбільша кількість понеділків може бути в одному році?

2(3 бали) Сума двох чисел 715.Одне з них закінчується нулем. Якщо цей нуль закреслити,то дістанемо друге число.Знайти ці числа

3(4 бали)У прикладі

$$1*2*3*4*5*6*7*8*9=100$$

замість * поставити знаки дій + , $-$, $\cdot$ та : так, щоб отримати правильну рівність.

4(4 бали) Дівчинка має стільки ж братів, скільки і сестер , а хлопчик не має братів.Скільки дітей в цій родині? Скільки хлопчиків і скільки дівчат?

5(6 балів) По прямій дорозі від міста А до міста М розміщено послідовно чотири села : Б,В,Г,Д. Відстань від А до В дорівнює 15 км, від А до Д — 50 км , від Г до Б — 20 км, від Г до М —30 км, а від В до Г на 5 км менше, ніж від Д до Г. Знайти відстань між кожною парою населлених пунктів, що розміщено поряд та між А та М.

Завдання гімназійної математичної олімпіади

6 клас

1(3 бали) Розставити в записі

$$7\cdot 9+12:3-2$$

дужки так, щоб значення виразу дорівнювало 23

2(3 бали) У скільки разів збільшиться двоцифрове число, якщо спереду нього приписати таке саме число?

3(4 бали) Отримавши торт , Карлсон вирішив з΄їсти $\frac{1}{3}$ його на сніданок, $\frac{1}{4}$ — на обід та $\frac{1}{5}$ — на вечерю. Також він вирішив пригостити Малюка $\frac{1}{6}$ частиною торта , а Фрекін Бок — $\frac{1}{10}$ частиною торта. Чи зможе Карлсон так розділити торт ?

4 (4 бали) Довести, що із будь-яких трьох натуральних чисел можна знайти два, сума яких ділиться на два.

5 (6 балів) 2 зошита і 3 ручки коштують 23 гривні, а 3 зошита і 2 ручки — 22 гривні. Скільки коштує одна ручка і скільки коштує один зошит?

Завдання гімназійної математичної олімпіади

7 клас

1(3 бали) Розставити в записі

$$7 \cdot 9 + 12 : 3 - 2$$

дужки так, щоб значення виразу дорівнювало 75

2(3 бали) Добуток двох чисел дорівнює 0, а їх різниця дорівнює 100. Знайти ці числа.

3(4 бали) Замінити букви цифрами , щоб отримати вірні рівності М·А=Т—Е=М:А=Т:И=К—А . Однакові букви означають однакові цифри.

4 (4 бали) Розв΄язати рівняння

$$(|x|-5)(|x+1|+2)=0$$

5 (6 балів) Найменше спільне кратне двох чисел дорівнює 240 , а їх найбільший спільний дільник — 8. Знайти ці числа, якщо відомо, що менше з них має тільки один простий множник 5 , який не входить у більше число.

Завдання гімназійної математичної олімпіади

8 клас

1(3 бали) Побудувати графік рівняння $3y+2x=6$

2(3 бали) Замінити букви цифрами , щоб отримати вірний приклад

СЛОВ,О + СЛОВ,О = ПІСНЯ

Однакові букви означають однакові цифри.

3(4 бали) Доведіть , що при довільному натуральному значенні

n сума $n^2+8n+15$ не ділиться на $n+4$

4 (4 бали) В рівнянні $(x+...)(x^4+1)=(x+2)(x^3+3)$ одне число стерто і замінено крапками. Знайдіть це число, якщо відомо, що один з коренів цього рівняння дорівнює одиниці

5 (6 балів) У рівнобедрений прямокутний трикутник, катет якого дорівнює a см, вписано прямокутник. Одна з вершин прямокутника збігається з вершиною прямого кута трикутника, а протилежна до неї вершина належить гіпотенузі. Знайти периметр прямокутника

Завдання гімназійної математичної олімпіади

9 клас

1(3 бали) В рівнянні $(x+...)(x^4+1)=(x+2)(x^3+3)$ одне число стерто і замінено крапками. Знайдіть це число, якщо відомо, що один з коренів цього рівняння дорівнює одиниці

2(3 бали) Сума двох натуральних чисел дорівнює 85, а їх найменше спільне кратне 102. Знайти ці числа.

3(4 бали) У рівнобедрений прямокутний трикутник, катет якого дорівнює a см, вписано прямокутник. Одна з вершин прямокутника збігається з вершиною прямого кута трикутника, а протилежна до неї вершина належить гіпотенузі. Знайти периметр прямокутника

4 (4 бали) У рівнянні $3x^2+bx+15=0$ знайти *b*, якщо відомо, що корені рівняння цілі числа.

5 (6 балів) На столі лежать три зовсім однакові конверти. У одному з них лежать два чорних папірці, у другому – чорний та білий, у третьому - два білих. На конвертах зроблено написи "Два білих", "Два чорних", "Чорний та білий". Відомо, що жоден з написів не відповід дійсності. Як, витягнувши лише один папірець,визначити, де лежать які папірці?

Завдання гімназійної математичної олімпіади

10 клас

1(3 бали) У рівнянні $3x^2+bx+15=0$ знайти *b*, якщо відомо, що корені рівняння цілі числа.

2(3 бали) Сума двох натуральних чисел дорівнює 85, а їх найменше спільне кратне 102. Знайти ці числа.

3(4 бали) Побудувати на координатній площині геометричне місце точок, що задовольняє умові: $x=\frac{y}{x}$

4 (4 бали) У гострокутному трикутнику АВС висоти перетинаються у точці Н. Довести, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників АВС, АНВ, АНС, ВНС, рівні між собою.

5 (6 балів) Скільки розгорток різної форми (які неможливо сумістити рухом на площині чи симетрією відносно прямої) має куб? Розгортка куба - сукупність різних квадратів на площині, кожен з яких має хоча б одну спільну сторону хоча б з одним із інших квадратів.

Завдання гімназійної математичної олімпіади

11 клас

1(3 бали) Побудувати на координатній площині геометричне місце точок, що задовольняє умові: $x = \frac{y}{x}$

2(3 бали) Розв'яжіть нерівність $|\sin x| + |\cos x| < 1$

3(4 бали) Розв'яжіть рівняння $y^2 + \frac{1}{y^2} - 4 = -(x^2 - 4x + 6)$

4 (4 бали) У гострокутному трикутнику АВС висоти перетинаються у точці Н. Довести, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників АВС, АНВ, АНС, ВНС, рівні між собою.

5 (6 балів) Скільки розгорток різної форми (які неможливо сумістити рухом на площині чи симетрією відносно прямої) має куб? Розгортка куба - сукупність різних квадратів на площині, кожен з яких має хоча б одну спільну сторону хоча б з одним із інших квадратів.

Відповіді

5 клас

1. $366 = 52 \cdot 7 + 2$, тому 53 понеділка
2. 650 і 65
3. 1+2+3+4+5+6+7+8·9=100
4. один хлопчик і дві дівчинки
5. АБ=10, БВ=5, ВГ=15, ГД=20, ДМ=10

6 клас

1. $(7 \cdot 9 + 12) : 3 - 2$
2. У 101 раз
3. Ні , бо $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = 1\frac{1}{20} > 1$
4. Із трьох натуральних чисел , хоча б два мають однакову парність .Тому їх сума ділиться на два.
5. 5 зошитів та 5 ручок коштують 45 гривен ? Тому одна ручка і один зошит коштують 9 гривен, а дві ручки і два зошита коштують 18 гривен. Тому ручка коштує 5 гривен, а зошит — 4 гривні.

7 клас

1. $7 \cdot 9 + 12 : (3 - 2)$
2. 0 і 100 або 0 і -100
3. 2·1=8—6=2:1=8:4=3—1
4. 5 та -5
5. Менше число має всі дільники , з яких складається НСД та ще множник 5, тому воно дорівнює 8·5=40. В більшому окрім 8 буде ще множник 240: (8·5)=6, тому воно дорівнює 8·6=48.

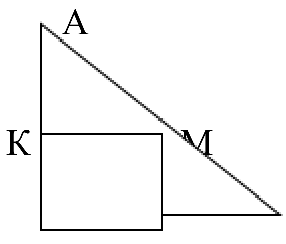
8 клас

1. Пряма , що проходить через точки (0;2) , (3;0)
2. 9453,5+9453,5=18907
3. $n^2 + 8n + 15 = (n+4)^2 - 1$. Тоді

$$\frac{n^2 + 8n + 15}{n+4} = \frac{(n+4)^2 - 1}{n+4} = n + 4 - \frac{1}{n+4}$$ — не ціле число

4. (1+...)(1+1)=(1+2)(1+3) , невідоме число дорівнює 5

5.



$\angle B = \angle LMB = 45^0$. Тому $LM = LB$.

$$P = 2(LM + LC) = 2(LB + LC) = 2BC = 2a$$

C L B

9 клас

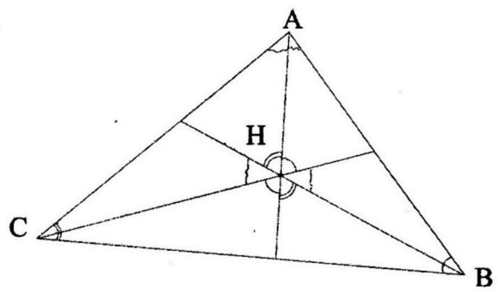
1. (1+...)(1+1)=(1+2)(1+3) , невідоме число дорівнює 5
2. Нехай *a* і *b* - шукані числа. Тоді $a + b = 85$, НСК $(a,b) = 102 = 2x3x17$. Шукані числа 51 і 34.
3. Див. задача №5 за 8-й клас
4. Нехай x_1 і x_2 - корені. Тоді за теоремою Вієта $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{3}, \\ x_1 x_2 = 5 \end{cases}$

   Тоді, $x_1 = 5, x_2 = 1$ або $x_1 = -5, x_2 = -1$. Отже, $b = -18$ або $b = 18$

5. Витягти папірець з конверту, що має напис "Чорний та білий". У ньому не може бути папірців різного кольору. Якщо ми витяти з нього білий папірець, то у конверті, де написано "Два білих" лежить два чорних папірці, а в конверті з написом "Два чорних" - лежать папірці різного кольору. Аналогічно міркуємо, якщо витягнемо чорні папірці.

10 клас

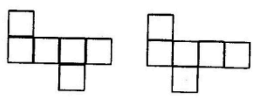
1. Див. задача №4 за 9 клас
2. Див. задача №2 за 9 клас
3. Парабола $y = x^2$ без точки (0;0)
4.

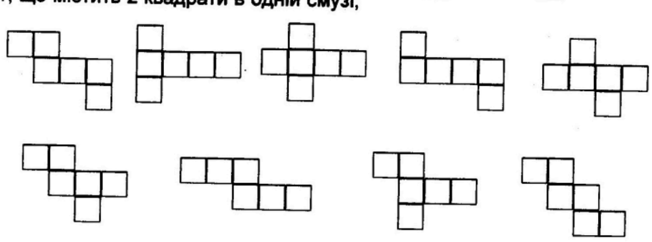


$$\mathrm{R_{ABC}} = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$$

$$\mathrm{R_{ABH}} = \frac{c}{2\sin(A+B)} = \frac{c}{2\sin C} = \mathrm{R} \text{ і т.д.}$$

5. 11 з них:
6, що містять 4 квадрата в одній смузі;
4, що містять 3 квадрати в одній смузі;
1, що містить 2 квадрати в одній смузі;





11 клас

1. Див. задача №3 за 10 клас

2. Після піднесення до квадрата маємо

$|\sin x|^2 + 2|\sin x \cdot \cos x| + |\cos x|^2 < 1$

$1 + |\sin 2x| < 1; \quad |\sin 2x| < 0$

Нерівність не має розв'язків.

3. Оскільки $y^2 + \frac{1}{y^2} \geq 2$, то $y^2 + \frac{1}{y^2} - 4 \geq -2.$

Також маємо: $-(x^2 - 4x + 6) = -((x-2)^2 + 2) = -(x-2)^2 - 2 \leq -2$

Отже, розв'язки $(2;1), (2;-1)$

4.Див. задача №4 за 10 клас

5. Див. задача №5 за 10 клас