

Thời gian làm bài: **150 phút** (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (5,0 điểm).

a) Tính giá trị biểu thức: $A = \sqrt{4+\sqrt{15}} + \sqrt{4-\sqrt{15}} - 2\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

$$B = \frac{x-5+2\sqrt{x+6\sqrt{x}+9}}{x+3\sqrt{x}+2} \cdot (x > 0)$$

b) Rút gọn biểu thức: và tìm x sao cho

$$B = \frac{2022}{2023}$$

Câu 2. (3,0 điểm). Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa $\frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{85}{13}$.

$$9\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 - 10\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right) = 0$$

Câu 3. (3,0 điểm). Giải phương trình:

Câu 4. (3,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$a\sqrt{3a^2 + 6b^2} + b\sqrt{3b^2 + 6c^2} + c\sqrt{3c^2 + 6a^2} \geq (a + b + c)^2.$$

Câu 5. (3,0 điểm). Cho tam giác ABC có $\angle ACB = 45^\circ$, gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp và H là trực tâm của tam giác ABC . Đường thẳng qua O và vuông góc với CO cắt AC và BC lần lượt tại điểm K và L . Chứng minh chu vi của tam giác HKL bằng với đường kính của (O) .

Câu 6. (3,0 điểm). Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài nhau tại điểm T . Hai đường tròn này nằm trong đường tròn (O_3) và tiếp xúc với (O_3) lần lượt tại điểm $M (M \in (O_1))$ và điểm $N (N \in (O_2))$. Tiếp tuyến chung tại T của (O_1) và (O_2) cắt O_3 tại điểm $P (P$ và O_3 nằm cùng phía của đường thẳng $MN)$. Đường thẳng PM cắt (O_1) tại $A (A \neq M)$, đường thẳng PN cắt O_2 tại $D (D \neq N)$ và đường thẳng MN cắt (O_1) và O_2 lần lượt tại $B (B \neq M)$ và $C (C \neq N)$. Gọi E là giao điểm của AB và CD .

a) Tứ giác $AEDP$ là hình gì? Giải thích.

b) Chứng minh rằng: $\angle EBC = \angle EDA$.

---HẾT---

LỜI GIẢI:

Câu 1. (5,0 điểm).

a) Tính giá trị biểu thức: $A = \sqrt{4+\sqrt{15}} + \sqrt{4-\sqrt{15}} - 2\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

b) Rút gọn biểu thức: $B = \frac{x-5+2\sqrt{x+6\sqrt{x}+9}}{x+3\sqrt{x}+2} \cdot (x > 0)$ và tìm x sao cho

$$B = \frac{2022}{2023}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad A &= \sqrt{4+\sqrt{15}} + \sqrt{4-\sqrt{15}} - 2\sqrt{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{6-2\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \cdot (\sqrt{5}-1) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

b) Với $x > 0$, khi đó ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{x-5+2\sqrt{x+6\sqrt{x}+9}}{x+3\sqrt{x}+2} = \frac{x-5+2\sqrt{(\sqrt{x}+3)^2}}{x+3\sqrt{x}+2} = \frac{x-5+2|\sqrt{x}+3|}{x+3\sqrt{x}+2} = \frac{x-5+2(\sqrt{x}+3)}{x+3\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x+3\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}. \end{aligned}$$

$$B = \frac{2022}{2023} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{2022}{2023} \Leftrightarrow 2023\sqrt{x}+2023 = 2022\sqrt{x}+4044$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2021$$

$$\Leftrightarrow x = 2021^2 \Leftrightarrow x = 4084441 \text{ (nhận).}$$

Vậy, với $x > 0$ thì $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{2022}{2023}$ tại $x = 4084441$.

Câu 2. (3,0 điểm). Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa $\frac{x^2+y^2}{x+y} = \frac{85}{13}$.

Lời giải

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x+y \in \mathbb{Z}; x^2+y^2 \in \mathbb{Z}$

$$\text{Ta có } \frac{x^2+y^2}{x+y} = \frac{85}{13} \Rightarrow x^2+y^2 = \frac{5 \cdot 17 \cdot (x+y)}{13}$$

Vì 5.17 không chia hết 13 nên $x^2 + y^2 \in \mathbb{Z}$ khi $(x+y) \equiv 13$

$$\Rightarrow x + y = 13k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow y = 13k - x$$

Thay (2) vào (1) ta có: $x^2 + (13k - x)^2 = 85k$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 26kx + 169k^2 - 85k = 0$$

Ta có $\Delta' = (13k)^2 - 2(169k^2 - 85k) = k(170 - 169k)$

Để (*) có nghiệm thì

$$\Delta' \geq 0$$

$$\Leftrightarrow k(170 - 169k) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{170}{169} = 1 + \frac{1}{169}$$

$$\Leftrightarrow k = 1$$

Với $k = 1$ ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x^2 + y^2 = 85 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $x = 6; y = 7$ hoặc $x = 7; y = 6$.

Vậy các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn là $x = 6; y = 7$ hoặc $x = 7; y = 6$

$$9\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 - 10\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right) = 0$$

Câu 3. (3,0 điểm). Giải phương trình:

Lời giải

ĐK : $x \neq \pm 1$

$$9\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 - 10\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 10 \cdot \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{x+2}{x-1} + \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 = 0$$

Đặt $\frac{x-2}{x+1} = a; \frac{x+2}{x-1} = b$. Ta có phương trình:

$$9a^2 - 10ab + b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (9a^2 - 9ab) - (ab - b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9a(a-b) - b(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(9a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ 9a-b=0 \end{cases}$$

+) Nếu $a-b=0$ thì:

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x+1} - \frac{x+2}{x-1} &= 0 \\ \Rightarrow (x-2)(x-1) - (x+2)(x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 - x^2 - 3x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -6x &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 & \text{ (thỏa mãn).}\end{aligned}$$

+) Nếu $9a - b = 0$ thì:

$$\begin{aligned}9 \cdot \frac{x-2}{x+1} - \frac{x+2}{x-1} &= 0 \\ \Rightarrow 9(x-2)(x-1) - (x+2)(x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 9x^2 - 27x + 18 - x^2 - 3x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 8x^2 - 30x - 25 &= 0 \\ \Leftrightarrow x_1 = \frac{15+5\sqrt{17}}{8} & \text{ (thỏa mãn)}; x_1 = \frac{15-5\sqrt{17}}{8} & \text{ (thỏa mãn)}\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là: $x_{1,2} = \frac{15 \pm 5\sqrt{17}}{8}; x_3 = 0$.

Câu 4. (3,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$a\sqrt{3a^2+6b^2} + b\sqrt{3b^2+6c^2} + c\sqrt{3c^2+6a^2} \geq (a+b+c)^2.$$

Lời giải

Cách 1. Với $a, b, c \geq 0$

$$\text{Ta có: } 3a^2 + 6b^2 = 2a^2 - 4ab + 2b^2 + a^2 + 4ab + 4b^2 = 2(a-b)^2 + (a+2b)^2 \geq (a+2b)^2$$

$$\text{vì } (a-b)^2 \geq 0, \forall a, b$$

$$\Rightarrow a\sqrt{3a^2+6b^2} \geq a\sqrt{(a+2b)^2} = a(a+2b) = a^2 + 2ab$$

$$\text{Tương tự: } b\sqrt{3b^2+6c^2} \geq b^2 + 2bc$$

$$c\sqrt{3c^2+6a^2} \geq c^2 + 2ca$$

$$\Rightarrow a\sqrt{3a^2+6b^2} + b\sqrt{3b^2+6c^2} + c\sqrt{3c^2+6a^2} \geq a^2 + 2ab + b^2 + 2bc + c^2 + 2ca = (a+b+c)^2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Cách 2.

$$\text{Áp dụng BĐT: } x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3}$$

$$\text{Ta có: } 3a^2 + 6b^2 = 3(a^2 + b^2 + b^2) \geq 3 \cdot \frac{(a+b+b)^2}{3} = (a+2b)^2$$

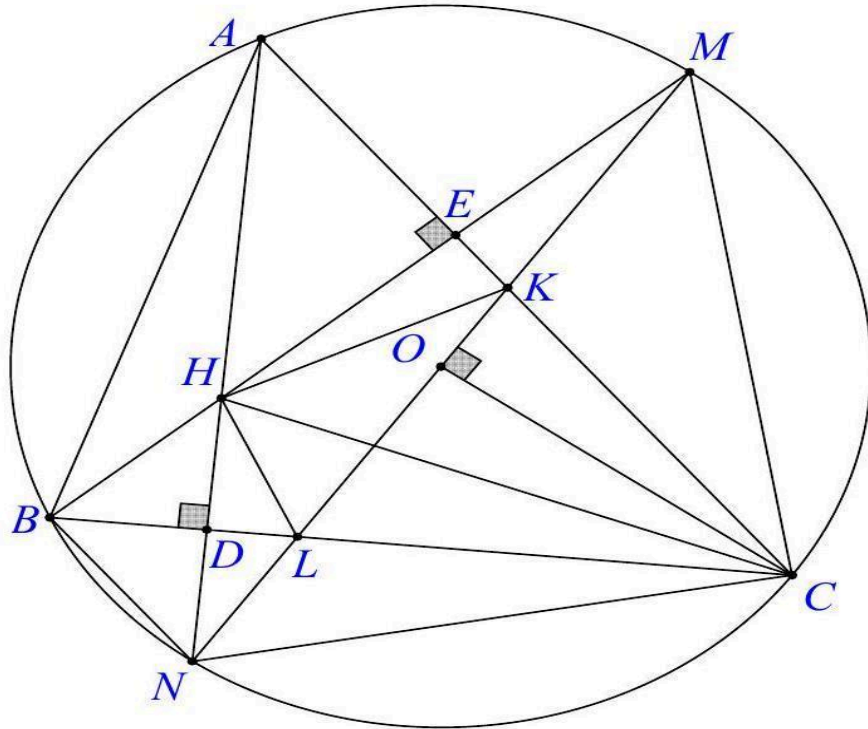
Cách 3.

Áp dụng BT: $(m^2 + n^2)(x^2 + y^2) \geq (mx + ny)^2$ Ta có:

$$3a^2 + 6b^2 = 3(a^2 + 2b^2) = (1^2 + \sqrt{2}^2)(a^2 + (b\sqrt{2})^2) \geq (1 \cdot a + \sqrt{2} \cdot b\sqrt{2})^2 = (a + 2b)^2$$

Câu 5. (3,0 điểm). Cho tam giác ABC có $\angle ACB = 45^\circ$, gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp và H là trực tâm của tam giác ABC . Đường thẳng qua O và vuông góc với CO cắt AC và BC lần lượt tại điểm K và L . Chứng minh chu vi của tam giác HKL bằng với đường kính của (O) .

Lời giải



Đường thẳng vuông góc với CO cắt đường tròn (O) tại hai điểm M, N . Ta có $\angle CAN = \angle CMN = 45^\circ$ (tam giác OMC vuông cân).

Do $AH \perp BC$ suy ra $\angle CAD$ là tam giác vuông cân ($\angle ABC = 45^\circ$) suy ra $\angle CAD = 45^\circ$.

Từ đó suy ra $\angle CAN = \angle CAH$ nên A, H, N thẳng hàng.

Gọi AD và BE là hai đường cao của tam giác ABC .

Ta có tứ giác $ABDE$ nội tiếp (hai đỉnh D và E kề nhau cùng nhìn cạnh AB dưới cùng một góc 90°)

$\Rightarrow \angle CAN = \angle HBC$ mà $\angle CAN = \angle BDN$ suy ra $\angle HBC = \angle BDN$

Xét $\angle BHN$ có BD vừa là đường cao vừa là phân giác nên $\angle BHN$ cân tại B

$\Rightarrow BD$ là đường trung trực của HN .

Do L thuộc BD nên $LH = LN$. Chứng minh tương tự ta có $KH = KM$.
 Như vậy chu vi tam giác HKL là $HL + KL + HK = NL + LK + KM = MN$ là đường kính của (O) .

Câu 6. (3,0 điểm). Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài nhau tại điểm T . Hai đường tròn này nằm trong đường tròn (O_3) và tiếp xúc với (O_3) lần lượt tại điểm $M (M \in (O_1))$ và điểm $N (N \in (O_2))$. Tiếp tuyến chung tại T của (O_1) và (O_2) cắt O_3 tại điểm P (P và O_3 nằm cùng phía của đường thẳng MN). Đường thẳng PM cắt (O_1) tại $A (A \neq M)$, đường thẳng PN cắt O_2 tại $D (D \neq N)$ và đường thẳng MN cắt (O_1) và O_2 lần lượt tại $B (B \neq M)$ và $C (C \neq N)$. Gọi E là giao điểm của AB và CD .

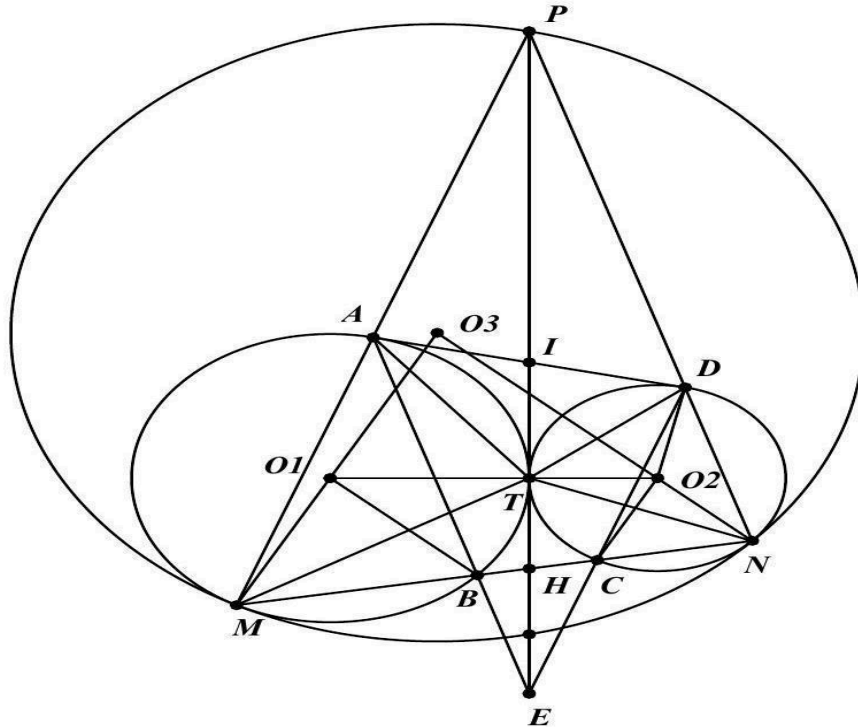
a) Tứ giác $AEDP$ là hình gì? Giải thích. b) Chứng minh rằng: $\angle EBC = \angle EDA$.

Lời giải

a) Tứ giác $AEDP$ là hình gì? Giải thích.

Ta có (O_1) tiếp xúc trong với (O_3) tại $M \Rightarrow O_1, O_3, M$ thẳng hàng;

Ta có (O_2) tiếp xúc trong với (O_3) tại $N \Rightarrow O_2, O_3, N$ thẳng hàng;



$\triangle MO_1B, \triangle MO_3N$ là các tam giác cân có $\hat{M}$ chung nên $\angle MO_1B = \angle MO_3N$;

$\triangle NO_2C, \triangle NO_3M$ là các tam giác cân có $\hat{N}$ chung nên $\angle NO_2C = \angle NO_3M$;

Lại có : $\widehat{MAB} = \frac{1}{2} \widehat{MO_1B}$; $\widehat{MPN} = \frac{1}{2} \widehat{MO_3N}$ (các góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung)

$\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MPN} \Rightarrow AE // PD$ (có cặp góc đồng vị bằng nhau) ;

$\widehat{NDC} = \frac{1}{2} \widehat{NO_2C}$; $\widehat{NPM} = \frac{1}{2} \widehat{NO_3M}$ (các góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung)

$\Rightarrow \widehat{NDC} = \widehat{NPM} \Rightarrow DE // PA$ (có cặp góc đồng vị bằng nhau)

Tứ giác $AEDP$ có các cạnh đối song song nên là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng: $\widehat{EBC} = \widehat{EDA}$.

Ta có PT là tiếp tuyến của $(O_1) \Rightarrow PT^2 = PA \cdot PM$;

PT là tiếp tuyến của $(O_2) \Rightarrow PT^2 = PD \cdot PN$;

$$\Rightarrow PA \cdot PM = PD \cdot PN (= PT^2) \Rightarrow \frac{PA}{PD} = \frac{PN}{PM} (1)$$

Gọi H là giao điểm của PE và MN , vì $BE // PN$; $CE // AM$ nên theo hệ quả của định lý Ta-let, ta có :

$$\frac{BE}{PN} = \frac{EH}{HP} = \frac{CE}{PM} \Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{PN}{PM} (2) \quad \text{Từ (1) và (2), ta có : } \frac{EB}{EC} = \frac{PA}{PD} \left(= \frac{PN}{PM} \right), \text{ mà}$$

$AEDP$ là hình bình hành

$$\Rightarrow PA = ED; PD = EA \Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{ED}{EA};$$

Xét $\widehat{EBC}$ và $\widehat{EDA}$ có :

$$\widehat{E} \text{ chung ; } \frac{EB}{EC} = \frac{ED}{EA} \text{ (chứng minh trên);}$$

$$\Rightarrow \widehat{EBC} \sim \widehat{EDA} (c.g.c) \Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{EDA}.$$