

CHƯƠNG 3: NGUYÊN HÀM -TÍCH PHÂN -ỨNG DỤNG

BÀI 2: TÍCH PHÂN

3. Dạng 3: Đổi biến dựa vào cận

Tính chất 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó ta có $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$.

Chứng minh:

Đặt $t = a + b - x \Rightarrow dx = -dt$.

$$\text{Khi đó } \int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(a+b-t)(-dt) = \int_a^b f(a+b-t) dt = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) + f(-x) = \cos^4 x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

A. $\frac{3\pi}{8}$.

B. $-\frac{3\pi}{8}$.

C. $\frac{3\pi}{16}$.

D. $-\frac{3\pi}{16}$.

Lời giải

Chọn C.

Giải theo tự luận:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx$$

Theo tính chất 1, ta có

$$\Rightarrow 2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx$$

$$= \left(\frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow I = \frac{3\pi}{16}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$$

Giải theo pp trắc nghiệm: Theo tính chất 1 thì $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx$. Đến đây bấm máy tích phân

này ta được kết quả $I = \frac{3\pi}{16}$.

Ví dụ 2: Cho trước số thực $m \in (0; 1)$. Tính $I = \int_{-m}^m \ln \frac{1+x}{1-x} dx$.

A. $\frac{m}{2}$.

B. 0.

C. $\frac{m^2}{4}$.

D. $\frac{m^2}{6}$.

Lời giải

Chọn B.

Giải theo tự luận:

$$I = \int_{-m}^m \ln \frac{1-x}{1+x} dx \Rightarrow 2I = \int_{-m}^m \left(\ln \frac{1+x}{1-x} + \ln \frac{1-x}{1+x} \right) dx = \int_{-m}^m \ln 1 dx = 0 \Rightarrow I = 0$$

Theo tính chất 1, ta có

$$I = \int_{-x}^x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$$

Giải theo pp trắc nghiệm: Bấm máy tích phân , bấm CALC với $X = 0,5$, ta được kết quả $I = 0$, tiếp tục CALC với $X = 0,1$ thì $I = 0$. Vậy ta chọn đáp án B.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = \frac{\pi \ln a}{b}$$

Ví dụ 3: Cho với a là số nguyên tố, b là số nguyên dương. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $b < a$.

B. $b = a^2$.

C. $b = a^3$.

D. $5a < b$.

Lời giải

Chọn C.

Giải theo tự luận:

Theo tính chất 1, ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(1 + \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(1 + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\frac{2}{1 + \tan x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dx - I$$

$$\Rightarrow 2I = x \ln 2 \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow I = \frac{\pi \ln 2}{8} \Rightarrow a = 2, b = 8.$$

Nên đáp án C đúng.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$$

Giải theo pp trắc nghiệm: Bấm tích phân và lưu vào máy tính bằng A.

$$A = \frac{\pi \cdot \ln a}{b} \Rightarrow b = \frac{\pi \ln a}{A}$$

Ta có

Ta dùng Mode 7 cho hàm số $f(x) = \frac{\pi \ln x}{A}$, start 1 end 20 step 1. Ta chọn những giá trị nguyên tố của x và các giá trị nguyên dương của $f(x)$.

Theo bảng trong máy tính, ta nhận $x = 2; f(x) = 8$, tức là $a = 2; b = 8$. Từ đó ta chọn C.

Tính chất 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$. Khi đó ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$.

Chứng minh:

Theo tính chất 1, ta có
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.$$

Ví dụ 4: Tính
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx.$$

- A. 0. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{2018}$.

Lời giải

Chọn C.

Giải theo tự luận:

Theo tính chất 2, ta có:
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}.$$

Giải theo pp trắc nghiệm: Dùng máy tính như sau:

Bấm tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx$, kết quả $\frac{\pi}{4}$.

Bấm tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$, kết quả $\frac{\pi}{4}$.

Vậy ta chọn C.

Tính chất 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$. Khi đó ta có
$$I = \int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

Chứng minh:

Theo tính chất 1, ta có

$$\int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx = \int_0^{\pi} (\pi - x) f(\sin(\pi - x)) dx = \int_0^{\pi} (\pi - x) f(\sin x) dx = \int_0^{\pi} \pi f(\sin x) dx - I$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi} \pi f(\sin x) dx \Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

Ví dụ 5: Tính
$$I = \int_0^{\pi} x \sin^3 x dx.$$

- A. 0. B. π . C. $-\frac{2\pi}{3}$. D. $\frac{2\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Giải theo tự luận:

Theo tính chất 3, ta có

$$\begin{aligned}\Rightarrow I &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^3 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x) \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x) d(\cos x) \\ &= -\frac{\pi}{2} \left(\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

Giải theo pp trắc nghiệm: bấm máy tích phân và được kết quả đáp án D.

BÀI TẬP VẬN DỤNG (Có chia mức độ)

NHẬN BIẾT

Câu 1. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = 3\pi$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$.

- A. 3π . B. -3π . C. π . D. $-\pi$.

Câu 2. Cho $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2\sqrt{2}$. Tính $I = \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx$.

- A. $-\sqrt{2}\pi$. B. $\sqrt{2}\pi$. C. $2\sqrt{2}\pi$. D. $-2\sqrt{2}\pi$.

THÔNG HIỂU

Câu 3. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = \pi$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [4 - f(\sin x)] dx$.

- A. 3π . B. -3π . C. π . D. $-\pi$.

Câu 4. Tính $I = \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$ biết $\int_{\pi}^0 xf(\sin x) dx = -\sqrt{3}\pi$.

- A. $2\sqrt{3}$. B. $-2\sqrt{3}$. C. $-\frac{\sqrt{3}\pi^2}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}\pi^2}{2}$.

VẬN DỤNG

Câu 5. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = a$. Tìm a biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [2 - 3f(\sin x)] dx = 4\pi$.

- A. -5π . B. 5π . C. π . D. $-\pi$.

VẬN DỤNG CAO

Câu 6. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[0; 3]$ và thỏa $f(x) \cdot f(3-x) = 1$ với mọi $x \in [0; 3]$. Tính $I = \int_0^3 \frac{dx}{1+f(x)}$.

- Câu 7.** Cho trước số thực $m \in (0;1)$. Tính
$$I = \int_{-m}^m \ln \left(x + \sqrt{e + x^2} \right) dx$$
.

Bảng đáp án

1	2	3	4	5	6	7
A	B	C	A	D	C	C

Hướng dẫn giải chi tiết CÁC CÂU KHÓ

Câu 6.

$$I = \int_0^3 \frac{dx}{1+f(x)} = \int_0^3 \frac{dx}{1+f(3-x)} = \int_0^3 \frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}} = \int_0^3 \frac{f(x) dx}{1+f(x)}$$

Theo tính chất 1, ta có

$$2I = \int_0^3 \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^3 \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int_0^3 1dx = 3 \Rightarrow I = \frac{3}{2}.$$

Câu 7.

Theo tính chất 1, ta có

$$I = \int_{-m}^m \ln(-x + \sqrt{e+x^2}) dx \Rightarrow 2I = \int_{-m}^m \ln(x + \sqrt{e+x^2}) dx + \int_{-m}^m \ln(-x + \sqrt{e+x^2}) dx$$

$$2I = \int_{-m}^m \ln(-x + \sqrt{e+x^2}) (x + \sqrt{e+x^2}) dx = \int_{-m}^m \ln e dx = 2m \Rightarrow I = m.$$

ĐỀ KIỂM TRA 25 CÂU 45 PHÚT CUỐI BÀI

Nhóm giáo viên tâm tâm

ĐỀ KIỂM TRA BÀI 2: TÍCH PHÂN

Thời gian: 45 phút – 25 Câu TN.

Câu 1: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \sqrt{5}$. Tính $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos x) dx$.

- A.** $\sqrt{5}$. **B.** $-\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 0.

Câu 2: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = -3$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos x + f(\sin x)] dx$.

- A.** 4. **B.** -4. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 3: Cho $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 4\sqrt{3}$. Tính $I = \int_0^{\pi} xf'(\sin x) dx$.

- Câu 3:** Cho $\int_0^1 f(x) dx = 1$. Tính

- A.** $4\pi\sqrt{3}$. **B.** $-2\pi\sqrt{3}$. **C.** $2\pi\sqrt{3}$. **D.** $-4\pi\sqrt{3}$.

Câu 4: Tính $I = \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$ biết $\int_{\pi}^0 xf(\sin x) dx = \frac{3\pi}{2}$.

- A.** -3 . **B.** 3 . **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 5: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = a$. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2 - f(\sin x)] dx$ theo a .

- A.** $2 - a$. **B.** $2a$. **C.** $\pi + a$. **D.** $\pi - a$.

Câu 6: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [6 - f(\cos x)] dx = \pi$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$.

- A.** 4π . **B.** 2π . **C.** 3π . **D.** 5π .

Câu 7: Cho $\int_0^{\pi} [1 - f(\sin x)] dx = \pi$. Tính $I = \int_{\pi}^0 xf(\sin x) dx$.

- A.** 0 . **B.** 2π . **C.** -2π . **D.** 1 .

Câu 8: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = 2$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) dx$.

- A.** 2 . **B.** 4 . **C.** 1 . **D.** 0 .

Câu 9: Cho $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^{\pi^2} f(\sin \sqrt{x}) dx$.

- A.** π . **B.** 2π . **C.** 8π . **D.** 4π .

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(x) + 2f(-x) = |x|$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

- A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 1 . **D.** 0 .

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(-x) - 3f(x) = 2x^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

- A.** $-\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{4}{3}$. **D.** 0 .

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cot x) dx = \frac{\pi \ln a}{b}$$

Câu 12: Cho với a là số nguyên tố, b là số nguyên dương. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.** $b - 2a < 0$. **B.** $b = a^2$. **C.** $b - 4a = 0$. **D.** $a^3 < b$.

Câu 13: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa $f(x) \cdot f(4-x) = 1$ với mọi $x \in (0; +\infty)$.

Tính $I = \int_1^3 \frac{dx}{1 + f(x)}$.

- A.** 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 14: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2017} \sin x + \sqrt{2018} \cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{c}$ với a, b là các số nguyên dương, c là số nguyên tố. Tính $T = a - b + c$.

- A.** 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 15: Cho $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \sqrt{5}$ và $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} xf(\sin 3x) dx$. Tính

- A.** $\frac{3\sqrt{5}\pi}{2}$. **B.** $-\frac{3\sqrt{5}\pi}{2}$. **C.** $-\frac{\sqrt{5}\pi}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}\pi}{6}$.

Câu 16: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\cos x) + f(\sin x)] dx = a$ và $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [3f(\sin x) - 1] dx$. Tính tích phân theo a .

- A.** $\frac{3a-2}{2}$. **B.** $\frac{3a-\pi}{2}$. **C.** $3a - \frac{\pi}{2}$. **D.** a .

Câu 17: Cho $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln(x + \sqrt{27 + x^2}) dx = \frac{b}{a} \ln b$ với a, b là các số nguyên dương; $\frac{b}{a}$ là phân số tối giản. Tính $T = a^3 - b$.

- A.** 61. **B.** 5. **C.** 25. **D.** 0.

Câu 18: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$ biết $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} xf(\sin x^2) dx = 1$.

- A.** $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

- Câu 19:** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $2f(x) + 3f(2-x) = 10$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính
- $$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} [1 + f(x)] dx.$$
- A.** 3. **B.** 11. **C.** 6. **D.** 1.
- Câu 20:** Cho $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2$. Tính $I = \int_0^{\pi} (x-3)f(\sin x) dx$.
- A.** $3 - \pi$. **B.** $6 - \pi$. **C.** $\pi - 3$. **D.** $\pi - 6$.
- Câu 21:** Giả sử $I_k = \int_{-1}^k \ln(x + \sqrt{k+x^2}) dx$ với k là số nguyên dương khác 1. Gọi S là tập hợp các giá trị k thỏa $I_k < 2$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?
- A.** 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.
- Câu 22:** Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = a^2$. Tìm tất cả các giá trị của a thỏa $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \leq 8$.
- A.** $-2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}$. **B.** $a \geq 2\sqrt{2}$.
C. $a \leq 2\sqrt{2}$. **D.** $a > -2\sqrt{2}$.
- Câu 23:** Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = a^2 - 5a$. Có bao nhiêu số nguyên $a \in [-10; 10]$ thỏa $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos x) dx > 4$?
- A.** 2. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 4.
- Câu 24:** Tính $I = \int_{-2}^2 \log_3(x^{1009} + \sqrt{9+x^{2018}}) dx$.
- A.** 2. **B.** 4. **C.** 1009. **D.** 2018.
- Câu 25:** Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx = 2018$. Tính $I = \int_1^{\sqrt{e^{\pi}}} \frac{1}{x} f(\sin(\ln x)) dx$.
- A.** -2018. **B.** 2018. **C.** $\ln 2018$. **D.** $-\ln 2018$.

----- Hết -----

Bảng đáp án
Hướng dẫn giải các câu VD – VDC

IV – BÀI TẬP LUYỆN TẬP (Ngân hàng đề – tối thiểu 50 câu chia đủ mức độ)

Nếu là 50 câu có thể chia số lượng 15-15-10-10

Số lượng khác >50 câu tối thiểu VD-VDC tổng 25 câu