Математический анализ (первый семестр)

Шапошников Станислав Валерьевич, Бегунц Александр Владимирович

Аннотация

Курс математического анализа является базовым курсом и призван в первом семестре познакомить слушателей с основными методами исследования функций на числовой прямой. Начало курса посвящено элементам теории множеств, определению и топологии вещественных чисел. Затем будут рассмотрены свойства непрерывных и дифференцируемых функций. Заключительная часть курса первого семестра посвящена методам нахождения первообразных и интегралу Римана. В результате освоения курса слушатели научаться всестороннему анализу числовых функций, включающему исследование поведения в особых точках и на бесконечности, нахождение экстремумов, исследование выпуклости, восстановление первообразной.

Необходимые базовые знания для прохождения курса.

Предполагается, что слушатели освоили школьную программу по математике в объеме, достаточном для поступления на механико-математический факультет.

План курса

Лекции 1 – 4. Множества. Функции. Биекции.

Множества. Декартово произведение. Функция (отображение) и ее график. Композиция функций. Инъекции, сюръекции, биекции. Операции с множествами, формулы Моргана. Отношение эквивалентности и отношение порядка. Множество натуральных чисел. Метод математической индукции. Конечные множества. Счетные множества и их свойства. Пример Кантора несчетного множества. Теорема Кантора о множестве всех подмножеств и Теорема Кантора-Бернштейна.

Лекции 5 – 6. Множество вещественных чисел.

Аксиоматическое определение множества вещественных чисел. Выполнение аксиомы полноты для множества бесконечных десятичные дробей. Принцип полноты Вейерштрасса. Аксиома Архимеда. Принцип Кантора вложенных отрезков. Несчетность отрезка. Континуальные множества.

Лекции 7 – 9. Предел последовательности.

Предел последовательности: единственность, ограниченность, отделимость. Переход к пределу в неравенствах. Арифметика пределов. Теорема о сходимости зажатой последовательности. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Число е. Теорема Больцано о сходящейся подпоследовательности. Частичные пределы. Верхний и нижний предел. Фундаментальные последовательности и Критерий Коши.

Лекции 10 – 12. Топология вещественной прямой.

Структура открытых и замкнутых множеств. Граничные и предельные точки. Замкнутость множества частичных пределов. Лемма Бореля--Гейне--Лебега. Компакты. Множество Кантора.

Лекции 13 – 15. Предел функции.

Определение Гейне предела функции и его свойства: единственность, арифметика, переход к пределу в неравенствах, теорема о сходимости зажатой функции, предел композиции. Определение Коши предела функции. Эквивалентность определения Гейне и определения Коши. Ограниченность и отделимость функции, имеющей конечный предел в данной точке. Замечательные пределы. Односторонние пределы. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной функции. Критерий Коши существования предела функции.

Лекции 16 – 19. Непрерывные функции.

Непрерывные функции: эквивалентные определения и локальные свойства. Классификация точек разрыва. Множество точек разрыва монотонной функции. Теоремы Вейерштрасса об ограниченности непрерывной на компакте функции и о достижении точной верхней и точной нижней граней множества значений. Теорема Коши о промежуточном значении и ее следствия. Теорема об обратной функции. Теорема Кантора о равномерной непрерывности. Построение показательной функции и логарифмической функции. Поточечная и равномерная сходимость: определения, примеры, сохранение непрерывности.

Лекции 20 – 24. Дифференцируемые функции.

Производная и дифференциал. Непрерывность дифференцируемой функции. Правила дифференцирования. Теорема о производной сложной функции. Инвариантность первого дифференциала. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Производные высокого порядка. Правило Лейбница. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме. Остаточные члены в форме Лагранжа и в форме Коши. Достаточные условия локального максимума и локального минимума. Выпуклая функция. Непрерывность выпуклой функции во внутренних точках области определения. Дифференциальные условия выпуклости. Неравенство Йенсена.

Лекции 25 – 26. Неопределенный интеграл.

Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства: линейность, формула интегрирования по частям и формула замены переменных. Таблица интегралов элементарных функций. Интегрирование рациональных функций и функций, сводящихся к рациональным.

Лекции 27 – 29. Интеграл Римана.

Восстановление функции по ее дифференциалу. Определение интеграла Римана. Формула Ньютона--Лейбница: если функция дифференцируема и ее производная интегрируема по Риману, то интеграл от производной равен разности значений функции в концах отрезка. Ограниченность интегрируемой функции. Интегрируемость <<ступеньки>>. Линейность и монотонность интеграла. Теорема о среднем. Перестановочность *равномерного предела и интеграла. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций.*

Лекции 30 – 32. Существование первообразной у непрерывной функции.

Аддитивность интеграла Римана. Непрерывность и дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом. Существование первообразной у непрерывной функции. Формула замены переменных. Формула интегрирования по частям. Множества меры ноль по Лебегу и их свойства. Критерий Лебега.

Литература

1. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях: В 3-х т. Том 1: Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: МЦНМО, 2017. – 412 с.

2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 13-е изд., испр. – М.: изд-во ЧеРо, изд-во Московского университета, 1997. – 625 с.

3. Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. Изд. 10-е, испр. – М.: МЦНМО, 2020. – 576 с.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. – М.: Лань, 2018. – Т. 1. – 608 с.

5. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. 6-е изд., стер. – М.: Дрофа, 2008. – 638 с.

6. Шварц Л. Анализ. I-й том. – М.: Мир, 1972. – 824 с.

7. Макаров Б.М., Подкорытов А.Н. Лекции по вещественному анализу. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 688 с.

8. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. Изд. 2-е, перераб. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 552 с.

9. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. – 2-е изд., испр. И доп. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.—728 с.