1. Lee y analiza el siguiente planteamiento:

¿Sabías que la velocidad de la luz es de 300,000 km/s? Existen laboratorios dedicados a la investigación en Física de partículas, mismas que se encuentran en todo el universo. Algunos investigadores intentan calcular qué tanto se puede acelerar una partícula y de esta manera acercarnos a saber si los objetos pueden viajar a velocidades cercanas a la velocidad de la luz.

Se estudia, en específico, el caso de una partícula cuya aceleración está dado por:

$$f''(t) = 3t^2 - 10t + 14$$

Los investigadores, están interesados en determinar:

a) ¿Cuál es la función de velocidad si al instante $t = 0$ **La velocidad de dicha partícula es de 0?**

Fórmula: $\int t dt = x^{n+1}/n + 1$

$f''(t) = 3t^2 - 10t + 14$

La operación que se debe realizar para determinar la función de velocidad de la partícula es la integral de la función de aceleración f"(t) con respecto al tiempo t. Por lo tanto, la operación es la siguiente:

$f'(t) = \int f''(t)dt = \int (3t\text{^}2 - 10t + 14)dt$

Para resolver esta integral, se deben aplicar las reglas de integración de polinomios. Primero, se integra cada término de la función por separado:

$\int 3t\text{^}2\, dt = t\text{^}3$

$\int -10t\, dt = -5t\text{^}2$

$\int 14\, dt = 14t$

Explicación:

Para resolver la integral de la función de aceleración, se deben aplicar las reglas de integración de polinomios. En este caso, la función de aceleración es una función polinómica de segundo grado, por lo que se puede integrar cada término por separado.

En la primera integral, se integra el término 3t^2, que es una función polinómica de tercer grado. La regla de integración de polinomios establece que la integral de una función polinómica de grado n es igual a una función polinómica de grado n+1 dividida por n+1. Por lo tanto, la integral de 3t^2 es t^3.

En la segunda integral, se integra el término -10t, que es una función polinómica de primer grado. La regla de integración de polinomios establece que la integral de una función polinómica de grado n es igual a una función polinómica de grado n+1 dividida por n+1. Por lo tanto, la integral de -10t es -5t^2.

En la tercera integral, se integra el término 14, que es una constante. La regla de integración de polinomios establece que la integral de una constante es igual a la constante multiplicada por la variable de integración. Por lo tanto, la integral de 14 es 14t.

Luego, se suman las integrales de cada término para obtener la función de velocidad:

$f'(t) = t\text{^}3 - 5t\text{^}2 + 14t + C$

Donde C es la constante de integración. Para determinar el valor de C, se utiliza la información de que la velocidad de la partícula es cero en el instante t=0. Por lo tanto, se tiene que:

$f'(0) = 0$

$0 = 0\text{^}3 - 5(0)\text{^}2 + 14(0) + C$

$C = 0$

Por lo tanto, la función de velocidad de la partícula es:

$f'(t) = t\text{^}3 - 5t\text{^}2 + 14t$

b) ¿Cuál es la función de posición, la cual se sabe que en el instante $t = 0$ **toma un valor de 2?**

Fórmula: $\int t dt = x^{n+1}/n + 1$

$f'(t) = t\text{^}3 - 5t\text{^}2 + 14t$

Para integrar esta función, se deben aplicar las reglas de integración de polinomios. Primero, se integra cada término de la función por separado:

$\int t\text{^}3\, dt = 1/4\, t\text{^}4$

$\int -5t^2\, dt = -5/3\, t^3$

$\int 14t\, dt = 7t^2$

Explicación:

En la primera integral, se integra el término 3t^2, que es una función polinómica de tercer grado. La regla de integración de polinomios establece que la integral de una función polinómica de grado n es igual a una función polinómica de grado n+1 dividida por n+1. Por lo tanto, la integral de 3t^2 es t^3.

En la segunda integral, se integra el término -10t, que es una función polinómica de primer grado. La regla de integración de polinomios establece que la integral de una función polinómica de grado n es igual a una función polinómica de grado n+1 dividida por n+1. Por lo tanto, la integral de -10t es -5t^2.

En la tercera integral, se integra el término 14, que es una constante. La regla de integración de polinomios establece que la integral de una constante es igual a la constante multiplicada por la variable de integración. Por lo tanto, la integral de 14 es 14t.

Luego, se suman las integrales de cada término para obtener la función de posición:

$f(t) = \int f'(t)dt = 1/4\, t^4 - 5/3\, t^3 + 7t^2 + C$

Donde C es la constante de integración. Para determinar el valor de C, se utiliza la información de que la posición de la partícula es 2 en el instante t=0. Por lo tanto, se tiene que:

$f(0) = 2$

$2 = 1/4\,(0)^4 - 5/3\,(0)^3 + 7(0)^2 + C$

$C = 2$

La función de posición de la partícula es:

$f(t) = 1/4\, t^4 - 5/3\, t^3 + 7t^2 + 2$

En el instante t=0, la posición de la partícula es 2, como se especifica en el enunciado. La función de posición permite conocer la posición de la partícula en cualquier instante de tiempo t, dado que se conoce su velocidad en cada instante.

c) ¿Cuánto ha recorrido la partícula en el intervalo [3,6]?

Fórmula: Teorema fundamental del cálculo.

$\int[a][b]f(x)dx = F(b) - F(a)$

Para determinar cuánto ha recorrido la partícula en el intervalo **3,6** se debe utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo, que establece que la integral definida de una función en un intervalo es igual a la diferencia entre los valores de la función en los extremos del intervalo.

$f(t) = 1/4\, t^4 - 5/3\, t^3 + 7t^2 + 2$

$\int[3][6]f(t)dt = F(t)$**=**$\int[3][6]1/4\, t^4 - 5/3\, t^3 + 7t^2 + 2$

$= [(6)^4/4 - 5(6)^3/3 + 7(6)^2 + 2] - [(3)^4/4 - 5(3)^3/3 + 7(3)^2 + 2]$

$= [1296/4 - 1080 + 252 + 2] - [20.25 - 45 + 63 + 2]$

$= [324 - 360 + 252 + 2] - [20.25 - 45 + 63 + 2]$

$= 218 - 40.25$

$= 258.25$

Este resultado indica que la partícula ha recorrido una distancia de 258.25 unidades en el intervalo 3,6. Es importante tener en cuenta que el resultado es positivo, lo que indica que la partícula se ha movido en dirección positiva del eje x.

d) Determina los puntos máximos y mínimos en su función de posición, si es que existen.

$f(t) = 1/4\, t^4 - 5/3\, t^3 + 7t^2 + 2$

Para determinar los puntos máximos y mínimos en la función de posición f(t) = 1/4 t^4 - 5/3 t^3 + 7t^2 + 2, primero debemos encontrar los puntos en los que la derivada de la función es igual a cero.

1.- Calculo la primera derivada de la función:

$f'(t) = (d/dt)(1/4\, t^4 - 5/3\, t^3 + 7t^2 + 2)$

$= t^3 - 8.33\, t^2 + 14$

Iguala la primera derivada a cero y resuelve para t:

$t(t^2 - 8.33t + 14) = 0$

Para encontrar las raíces de esta ecuación, puedo usar factores comunes o aplicar la fórmula general para ecuaciones cuadráticas. En este caso, aplicaremos la fórmula general:

$t = (-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}) / (2a)$

$Donde\ a = 1,\ b = -8.33\ yc = 14.$

$t = (-(-8,33) \pm \sqrt{((-8,33)^2 - 4(1)(14))}) / (2(1))\ t = (8,33 \pm \sqrt{(69,5289 - 56)}) / 2$

$t = (8,33 \pm \sqrt{13,5289}) / 2$

$t = (8,33 \pm 3,679) / 2$

Esto nos da las siguientes soluciones:

$t = (8.33 + 3.679) / 2 \approx 4.165$

$t = (8.33 - 3.679) / 2 \approx 3.165$

$t = -8.33 / 2 = -4.165$

Sin embargo, como estamos buscando puntos máximos y mínimos, solo consideramos las soluciones positivas, es decir, t = 4.165 yt = 3.165.

2.- Calculo la segunda derivada de la función:

$f''(t) = (d^2/dt^2)(t^3 - 8.33\, t^2 + 14t)$

$= 3t^2 - 16.66t + 14$

Evalúa la segunda derivada en cada punto crítico:

$f''(0) = 3(0)^2 - 16.66(0) + 14 = 14$

$f''(4.165) = 3(4.165)^2 - 16.66(4.165) + 14 \approx -3,33$

$f''(3,165) = 3(3,165)^2 - 16,66(3,165) + 14 \approx 3,33$

$Observamos\ que\ f''(0) > 0,\ f''(4.165) < 0\ y\ f''(3.165) > 0.$

3.- Evalúo la función de posición en cada punto crítico:

$f(0) = 1/4(0)^4 - 5/3(0)^3 + 7(0)^2 + 2 = 2$

$f(4.165) = 1/\ 4(4,165)^4 - 5/3(4,165)^3 + 7(4,165)^2 + 2 \approx 38,8$

$f(3,165) = 1/4(3,165)^4 - 5/3(3,165)^3 + 7\ (3.165)^2 + 2 \approx 16.6$

La función de posición f(t) tiene dos puntos mínimos locales en t = 0 yt = 3.165, y un punto máximo local en t = 4.165.

e) ¿Cuál es la razón de cambio promedio de la función de posición en los intervalos de tiempo: [2,4] y [5,6]?

Razón de cambio promedio = (f(tf) - f(ti)) / (tf -ti)

$f(t) = 1/4\,t^4 - 5/3\,t^3 + 7t^2 + 2$

$f(2) = 1/4(2)^4 - 5/3(2)^3 + 7(2)^2 + 2$

$f(2) = 1/4(16) - 5/3(8) + 7(4) + 2$

$f(2) = 4 - 13.33 + 28 + 2$

$f(2) = 20.67$

$f(t) = 1/4\,t^4 - 5/3\,t^3 + 7t^2 + 2$

$f(4) = 1/4(256) - 5/3(64) + 7(16) + 2$

$f(4) = 64 - 106.66 + 112 + 2$

$f(4) = 71.34$

Razón de cambio promedio = (f(tf) - f(ti)) / (tf -ti)

Razón de cambio promedio = 71.34 - 20.67 / (4 -2)

Razón de cambio promedio = 50.67 / 2

Razón de cambio promedio = 25.335

[5,6]

$f(t) = 1/4\, t^4 - 5/3\, t^3 + 7t^2 + 2$

$f(5) = 1/4(5)^4 - 5/3(5)^3 + 7(5)^2 + 2$

$f(5) = 1/4(625) - 5/3(125) + 7(25) + 2$

$f(5) = 156.25 - 208.33 + 175 + 2$

$f(5) = 124.92$

$f(6) = 1/4\, t^4 - 5/3\, t^3 + 7t^2 + 2$

$f(6) = 1/4(6)^4 - 5/3(6)^3 + 7(6)^2 + 2$

$f(6) = 1/4(1296) - 5/3(216) + 7(36) + 2$

$f(6) = 324 - 360 + 252 + 2$

$f(6) = 218$

Razón de cambio promedio = (f(tf) - f(ti)) / (tf -ti)

Razón de cambio promedio = (218) - (124.92)/ (4 -2)

Razón de cambio promedio = 93.08 / 2

2. Cuando hayas finalizado, analiza y da respuesta a los siguientes planteamientos:

a) ¿Qué nos indica la diferencia en el cálculo de la razón de cambio promedio en los intervalos de interés?

La razón de cambio promedio en los intervalos de interés nos indica la velocidad promedio de la partícula en esos intervalos de tiempo. En el intervalo 2,4 la razón de cambio promedio es de 25.335 unidades por unidad de tiempo, lo que indica que la velocidad promedio de la partícula en ese intervalo es de 25.335 unidades por unidad de tiempo. En el intervalo 5,6 la razón de cambio promedio es de 93.08 unidades por unidad de tiempo, lo que indica que la velocidad promedio de la partícula en ese intervalo es de 93.08 unidades por unidad de tiempo. La diferencia en el cálculo de la razón de cambio promedio en los intervalos de interés indica que la velocidad de la partícula en el intervalo 5,6 es mayor que en el intervalo 2,4.

b) Imagina que, en lugar de estar hablando de la velocidad de una partícula, estuviéramos calculando ingresos ¿Qué utilidad tendría el cálculo de la razón de cambio promedio en el contexto de un negocio familiar? Argumenta tu respuesta en máximo 10 líneas.

El cálculo de la razón de cambio promedio en el contexto de un negocio familiar sería útil para analizar el crecimiento de los ingresos a lo largo del tiempo. Al calcular la razón de cambio promedio de los ingresos en un intervalo de tiempo determinado, los dueños del negocio pueden tener una idea de la tasa de crecimiento de sus ingresos y tomar decisiones informadas sobre cómo mejorar su negocio en el futuro. Por ejemplo, si la razón de cambio promedio de los ingresos es baja, los dueños del negocio pueden decidir implementar nuevas estrategias de marketing o reducir costos para mejorar la rentabilidad del negocio.

Fuentes:

López, J. (2018). Cálculo Diferencial e Integral: Derivadas y Antiderivadas. Ciudad de México, México: Editorial Trillas.

García, R. (2019). Derivadas y Antiderivadas en el Cálculo: Un Enfoque Práctico. Monterrey, México: Editorial Limusa.

Rodríguez, A. (2017). Aplicaciones de las Derivadas y Antiderivadas en Economía. Guadalajara, México: Editorial Universidad de Guadalajara.

Morales, C. (2016). Fundamentos de Cálculo: Derivadas y Antiderivadas. Ciudad de México, México: Editorial Pearson.

Ramírez, M. (2020). Derivadas y Antiderivadas: Conceptos y Ejercicios Resueltos. Puebla, México: Editorial Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.