

Première partie

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $K_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Calcul de K_0, K_1, K_2 .

$$K_0 = \int_0^1 dt = 1. \quad K_1 = \int_0^1 (1-t^2) dt = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$K_2 = \int_0^1 (1-t^2)^2 dt = \int_0^1 (1-2t^2+t^4) dt = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.$$

Conclusion :

$$K_0 = 1, \quad K_1 = \frac{2}{3}, \quad K_2 = \frac{8}{15}$$

2. $(1-t^2)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k t^{2k}$ ou encore avec l'autre notation du coefficient du binôme : $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} t^{2k}$.

On en déduit :

$$K_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{C_n^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{2k+1}$$

3. Pour

$n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

Calcul de I_0, I_1, I_2 et de J_0, J_1, J_2 .

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{4}$$

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1, \quad J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{\pi}{4}$$

Conclusion :

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1, \quad I_2 = \frac{\pi}{4}, \quad J_0 = \frac{\pi}{2}, \quad J_1 = 1, \quad J_2 = \frac{\pi}{4}$$

Rq : D'une manière générale, $I_n = J_n$, effectuer pour cela le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ dans I_n .

4. Dans K_n , effectuons les changements de variable suivants $t = \sin x$ ou bien $t = \cos x$. On a :

Pour $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ d'où $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)^n \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+1} dx = J_{2n+1}$.

Pour $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$ d'où $K_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos^2 x)^n \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n+1} dx = I_{2n+1}$.

Conclusion : $K_n = I_{2n+1} = J_{2n+1}$.

5. Pour $n \geq 2$, intégrons I_n par parties en posant : $\begin{cases} u = \sin^{n-1} x & u' = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{cases}$.

On a alors : $I_n = -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx$

soit : $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$ d'où : $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

Conclusion : $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

6. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, I_{2p} s'exprime en fonction de I_0 et I_{2p+1} en fonction de I_1 .

On a : $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)} I_{2p-4} = \dots = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 3.1}{2p(2p-2)\dots 4.2} I_0$.

On peut condenser cette écriture sous la forme : $I_{2p} = \frac{(2p)!}{[2p(2p-2)\dots 4.2]^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}$.

On a aussi : $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{2p(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)} I_{2p-3} = \dots = \frac{2p(2p-2)\dots 4.2}{(2p+1)(2p-1)\dots 5.3} I_1$.

On peut condenser cette écriture sous la forme : $I_{2p+1} = \frac{[2p(2p-2)\dots 4.2]^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$.

Conclusion : $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$.

7. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq \sin x \leq 1$. D'où :

$0 \leq \sin^{2p+1} x$, $\sin^{2p+1} x - \sin^{2p} x = \sin^{2p} x (\sin x - 1) \leq 0$ et de même

$\sin^{2p} x - \sin^{2p-1} x = \sin^{2p-1} x (\sin x - 1) \leq 0$.

Conclusion : $0 \leq \sin^{2p+1} x \leq \sin^{2p} x \leq \sin^{2p-1} x$.

On en déduit, en intégrant les inégalités précédentes entre 0 et $\frac{\pi}{2}$: $0 \leq I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}$.

8. On a, pour $p \geq 1$, $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1}$ d'où : $\frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p}$.

Les inégalités obtenues au 7. donnent, en divisant par $I_{2p+1} > 0$: $0 \leq 1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}}$.

On retiendra : $1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{2p+1}{2p}$ et par suite $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$.

9. Utilisons les expressions non condensées de I_{2p} et I_{2p+1} obtenues au 6.

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 3.1}{2p(2p-2)\dots 4.2} \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p+1)(2p-1)\dots 3.1}{2p(2p-2)\dots 4.2} = \frac{2p+1}{2} \pi \left[\frac{(2p-1)(2p-3)\dots 3.1}{2p(2p-2)\dots 4.2} \right]^2$$

Conclusion : $\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2} \pi \left[\frac{(2p-1)(2p-3)\dots 3.1}{2p(2p-2)\dots 4.2} \right]^2$.

10. on $\frac{1}{p} \left[\frac{2p(2p-2)\dots 4.2}{(2p-1)(2p-3)\dots 3.1} \right]^2 = \frac{1}{p} \times \frac{\pi(2p+1)}{2} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}$ de sorte que, puisque $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$,

a : $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \left[\frac{2p(2p-2)\dots 4.2}{(2p-1)(2p-3)\dots 3.1} \right]^2 = \pi$.

11. a) $I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 3.1}{2p(2p-2)\dots 4.2} \times \frac{\pi}{2}$.

Or le résultat précédent permet d'écrire : $\frac{2p(2p-2)\dots 4.2}{(2p-1)(2p-3)\dots 3.1} \sim \sqrt{p\pi}$.

On en déduit : $I_{2p} \sim \frac{\pi}{2\sqrt{p\pi}}$ soit : $I_{2p} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$.

b) Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$, on a que $I_{2p} \sim I_{2p+1}$ soit : $I_{2p+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$

c) On a :
$$\begin{cases} I_{2p} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2 \times 2p}} \\ I_{2p+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2 \times (2p+1)}} \end{cases}$$
 , ce qui permet d'affirmer que : $I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Deuxième partie

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n n!}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \sqrt{n+1}}{e^{n+1} (n+1)!} \times \frac{e^n \sqrt{n}}{n^n \sqrt{n}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ soit encore $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$.

2. a) Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\ln(1+x)$: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$

b) On applique ce développement pour obtenir un équivalent de $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, l'infiniment petit étant $\frac{1}{n}$.

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) = -1 + n \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -1 + \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon(n)\right)$$

soit : $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -1 + 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon(n) = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon(n)$. Conclusion $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \sim \frac{1}{12n^2}$

3. Le terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est équivalent à $\frac{1}{12n^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente.

Le théorème sur les séries à termes positifs équivalentes assure que la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est convergente.

4. Soit V_n la somme partielle d'indice n de la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

La convergence de la série de terme général v_n se traduit par $V_{n-1} \rightarrow V$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Or
$$V_{n-1} = v_1 + \dots + v_{n-1} = \ln\left(\frac{u_2}{u_1}\right) + \ln\left(\frac{u_3}{u_2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) = \ln\left(\frac{u_2 u_3 \dots u_n}{u_1 u_2 \dots u_{n-1}}\right) = \ln\left(\frac{u_n}{u_1}\right)$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{u_n}{u_1}\right) = V$ ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite :

$u_1 e^V = e^{V-1} = l > 0$. Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l > 0$

5. l étant strictement positive (essentiellement non nulle), il est légitime d'écrire que :
$$n! \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{l} \times \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$$

6. En I10 on avait établi que $\frac{1}{p} \left[\frac{4^p (p!)^2}{(2p)!} \right] \sim_{p \rightarrow +\infty} \pi$ soit encore $\frac{4^p (p!)^2}{(2p)!} \sim_{p \rightarrow +\infty} \sqrt{p\pi}$. Mais alors :

$$2^{2p} \frac{1}{l^2} \frac{p^{2p+1}}{e^{2p}} \frac{l e^{2p}}{(2p)^{2p+\frac{1}{2}}} \sim_{p \rightarrow +\infty} \sqrt{p\pi}$$

d'où $\frac{1}{l} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2}} \sim_{p \rightarrow +\infty} \sqrt{p\pi}$ soit enfin :

$$l = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{et} \quad n! \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}$$

Troisième partie

Soit l'équation différentielle : **(E)** : $16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' - y = 0$.

1. Solution développable en série entière :
$$a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On a : $a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

$$a'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} + \dots$$

$$a''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \dots$$

On reporte dans l'équation différentielle et on examine le terme constant, le coefficient de x , ... , x^n .
Par unicité du développement en série de la fonction nulle, on doit avoir :

Cte : $-8a_1 - a_0 = 0$.

x : $-32a_2 + 16a_1 - 16a_2 - a_1 = 0$ soit $-48a_2 + 15a_1 = 0$.

Puis à partir du terme en x^2 , on a le « régime de croisière » :

$$x^n : 16n(n-1)a_n - 16(n+1)na_{n+1} + 16na_n - 8(n+1)a_{n+1} - a_n = 0 \text{ soit } 8(n+1)(2n+1)a_{n+1} = (16n^2 - 1)a_n$$

On retiendra la formule : $a_{n+1} = \frac{(4n+1)(4n-1)}{(4n+4)(4n+2)} a_n$ qui à l'ordre n s'écrit :

$$n \geq 1, \quad a_n = \frac{(4n-3)(4n-5)}{4n(4n-2)} a_{n-1}$$

$$\sum a_n x^n$$

2. Rayon de convergence de la série

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ et donc la règle de d'Alembert donne pour rayon de convergence : $R=1$.

3. Calcul de a_n pour $a_0 = 1$

On a : $a_n = \frac{(4n-3)(4n-5)}{4n(4n-2)} \times \frac{(4n-7)(4n-9)}{(4n-4)(4n-6)} \times \dots \times \frac{5.3}{8.6} \times \frac{1.(-1)}{4.2} a_0$, ce que l'on peut écrire sous la

forme : $a_n = -\frac{(4n-2)!}{4n[(4n-2)4n-4] \dots 4.2]^2} = -\frac{4n(4n-2)!}{[4n(4n-2) \dots 4.2]^2} = -\frac{1}{4n-1} \times \frac{(4n)!}{[2^{2n}(2n)!]^2}$

$$a_n = -\frac{1}{4n-1} \times \frac{(4n)!}{[2^{2n}(2n)!]^2}$$

Conclusion :

4. Equivalent de a_n quand $n \rightarrow +\infty$

On a : $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{4n} \times \sqrt{2\pi} (4n)^{4n+\frac{1}{2}} e^{-4n} \times \frac{1}{4^{2n} (2\pi)(2n)^{4n+1} e^{-4n}} = -\frac{1}{4n\sqrt{n}\sqrt{2\pi}}$

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{4\sqrt{2\pi} n\sqrt{n}}$$

Conclusion :

FIN