

SALINAN SOAL OLIMPIADE SUTOMO WORLD EDUCATION EXPO 2023

MATEMATIKA SWEE 2023

07 OKTOBER 2023

A. Babak Penyisihan

Terima Kasih kepada Pak James Tantono yang sudah mengetik soal Babak Penyisihan

1. Diberikan trapesium ABCD, dengan AD sejajar BC. Titik E dan F masing-masing titik tengah AB dan DC. Jika

$$\frac{[AEFD]}{[EBCF]} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-\sqrt{3}},$$

dan $[ABD] = \sqrt{3}$, tentukan luas ABCD.

Note: $[ABC]$ menyatakan luas ABCD.

2. Tentukan bilangan bulat positif n terkecil sehingga $\sqrt{\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n}}$ merupakan bilangan bulat.
3. Diberikan fungsi f memenuhi $2f(x - x^{-1}) + f(x^{-1} - x) = 3(x + x^{-1})^2$ untuk semua $x \neq 0$. Tentukan nilai $f(100)$.
4. Samuel mencoba menyusun 4 huruf yang huruf-hurufnya diambil dari kata MATEMATIKA. Ada berapa susunan yang didapat?

5. Tentukan banyaknya bilangan prima p yang memenuhi

$$|2 + (3p^2)| > \frac{3}{2}$$

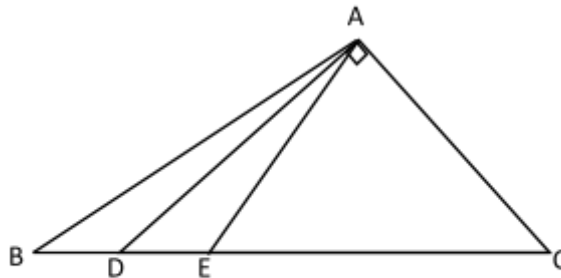
6. Tentukan bilangan yang terdiri dari 5 digit yang dimana apabila bilangan tersebut dikalikan dengan suatu bilangan bulat n , dengan $2 \leq n \leq 8$ diperoleh bilangan 5 digit baru dengan kondisi semua digit-digitnya terbalik.

7. Misalkan a_n adalah suku ke n dari barisan geometri, dengan $a_1 = 1$ dan $a_3 = 3$. Tentukan hasil

$$\left(\sum_{i=0}^{10} (10^i) a_{i+1} \right) \left(\sum_{j=0}^{10} (-1)^j (10^j) a_{j+1} \right)$$

8. Diberikan persegi ABCD dengan panjang sisi satu satuan. Titik E dan F berturut-turut berada pada sisi BC dan CD sehingga AEF sama sisi. Dibuat pula persegi yang melewati B yang sisi-sisinya sejajar dengan ABCD dengan salah satu titik sudutnya berada pada ruas garis AE, namun bukan A maupun E. Jika panjang sisi persegi yang lebih kecil adalah $\frac{a-\sqrt{b}}{c}$ dengan a, b, c bilangan bulat dan b bukan kuadrat sempurna. Tentukan nilai dari $(a + b - c)^2$.

9. Perhatikan gambar di bawah ini, AD tegak lurus dengan AC dan $\angle BAD = \angle DAE = 12^\circ$. Jika $AB + AE = BC$, tentukan $\angle ABC$.



10. Dengan hanya menggunakan digit-digit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 tanpa perulangan (hanya digunakan sekali). Tentukan bilangan terbesar kelipatan 55 yang mungkin.

11. Pada segitiga ABC, diberikan

$$(\sin \sin A + \sin \sin B) : (\sin \sin B + \sin \sin C) : (\sin \sin C + \sin \sin A) = 9 : 10 : 11.$$

Tentukan nilai $480 \cos \cos A$.

12. Diberikan $S = \{1, 2, 3, \dots, 48, 49\}$ dan diambil n bilangan dari S serta disusun pada bentuk melingkar. Tentukan n maksimal jika hasil kali sebarang dua bilangan yang saling bersebelahan pada bentuk melingkar kurang dari 100.

13. Diberikan x, y, z dan λ bilangan real positif yang memenuhi

$$yz = 6\lambda x$$

$$xz = 6\lambda y$$

$$xy = 6\lambda z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Tentukan nilai $(xyz\lambda)^{-1}$.

14. Diberikan a, b, c, d bilangan real yang memenuhi

$$a^2 + b^2 + 2a - 4b + 4 = 0,$$

$$c^2 + d^2 - 4c + 4d + 4 = 0$$

M dan m berturut-turut menyatakan maksimum dan minimum dari $(a - c)^2 + (b - d)^2$. Tentukan $M \times m$.

15. Diberikan a, b, c bilangan real positif yang memenuhi

$$a^2 + ab + b^2 = 25,$$

$$b^2 + bc + c^2 = 49,$$

$$c^2 + ca + a^2 = 64.$$

Tentukan nilai $(a + b + c)^2$.

16. Tentukan koefisien x^{29} dari ekspansi $(1 + x^5 + x^7 + x^9)^{16}$.

17. Tiga bilangan asli a, b dan c memenuhi $a^2 + b^2 = c^2$. Diketahui bahwa c habis membagi $6a - 5$ dan $5a + 5$ habis membagi b . Tentukan jumlahan semua nilai c yang mungkin.

18. Sembilan pasang suami istri ingin berfoto dalam posisi tiga baris. Terdapat 4 orang di baris depan, 6 orang di baris tengah dan 8 orang di baris belakang. Mereka sepakat bahwa setiap pasang suami istri harus dalam baris yang sama, serta setiap dua orang yang bersebelahan haruslah pasangan suami istri atau berjenis kelamin sama. Tentukan banyak posisi berbeda yang mungkin dilakukan.

19. Diberikan digit-digit a, b dan c tak nol dan n bilangan bulat positif. A_n bilangan yang terdiri dari n digit dengan masing-masing digitnya adalah a . B_n bilangan yang terdiri dari n digit dengan masing-masing digitnya adalah b . C_n bilangan yang terdiri dari $2n$ digit dengan masing-masing digitnya adalah c . Tentukan nilai terbesar yang mungkin $a + b + c$ dengan minimal ada dua nilai n yang memenuhi $C_n - B_n = A_n^2$.

20. Diketahui suatu partikel pada koordinat Cartesius, semula terletak pada titik asal $(0, 0)$. Partikel tersebut bergerak, setiap langkah adalah satu unit searah sumbu X positif, searah sumbu X negatif, searah sumbu Y positif atau searah sumbu Y negatif. Banyaknya cara partikel tersebut bergerak agar setelah bergerak 9 langkah partikel tersebut sampai pada titik $(2, 3)$ adalah ...

B. Babak Final

1. Tentukan semua bilangan bulat a, b, c yang memenuhi:

$$a + b + c = 15$$

$$(a - 3)^3 + (b - 5)^3 + (c - 7)^3 = 540$$

2. Diketahui segitiga ABC merupakan segitiga lancip dengan $BC = 5$. E merupakan titik pada AC sehingga BE tegak lurus AC, F merupakan titik pada AB sehingga $AF = BF$. Jika diketahui bahwa $BE = CF = 4$, maka tentukan luas dari segitiga ABC.
3. Tentukan bilangan bulat positif n yang habis membagi $p^6 - 1$ untuk semua bilangan prima $p > 7$.
4. Tentukan semua pasangan bilangan bulat (a, b) sehingga $\frac{a^2b-1}{a+1}$ dan $\frac{b^2a+1}{b-1}$ merupakan bilangan bulat.
5. Ada dua tumpukan koin, masing – masing berisi 2010 buah. Dua pemain A dan B bermain secara bergiliran (A bermain lebih dulu). Pada setiap giliran, pemain yang bermain harus mengambil satu atau lebih banyak koin dari satu tumpukan atau tepat satu koin dari setiap tumpukan. Siapapun yang mengambil koin terakhir adalah pemenangnya. Pemain mana yang akan menang jika mereka berdua bermain dengan cara terbaik?