ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON INCÓGNITA

ECUACIÓN CUADRÁTICA

Es aquella ecuación polinomial de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0$$

donde x es la incógnita

FÓRMULA GENERAL

Sea $ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0$

Multiplicando por (4a)

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

Sumando y restando b^2

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

Despejando

$$\boxed{x_{(1,2)} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Fórmula general para resolver una ecuación cuadrática

NOTA

$b^2 - 4ac$ es el discriminante

Ejemplo : Resuelva $3x^2 - 5x - 1 = 0$

Resolucion:

$ax^2 + bx + c = 0$

$3x^2 - 5x - 1 = 0$

$3x^2 + (-5x) + (-1) = 0$

Vemos que $a = 3, b = -5, c = -1$

$$x_{(1,2)} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Reemplazando en la fórmula

$$x_{(1,2)} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)}$$

$$x_{(1,2)} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{37}}{6} \qquad x_2 = \frac{5-\sqrt{37}}{6}$$

Entonces C.S. = $\left\{\frac{5+\sqrt{37}}{6}; \frac{5-\sqrt{37}}{6}\right\}$

PROPIEDADES GENERALES

1) NATURALEZA DE LAS RAÍCES

Sea $ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0$

donde $\{a,b,c\} \subset \mathbb{R}$; $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 2 raíces reales diferentes.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 2 raíces reales iguales (una única solución)

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 2 raíces imaginarias conjugadas.

Observe que una ecuación cuadrática tiene raíces reales, si $\Delta \geq 0$

2) OPERACIONES BÁSICAS CON RAÍCES

Sea $ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0$

De raíces x_1, x_2, por el Teorema de Cardano:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \qquad \boxed{(x_1)(x_2) = \frac{c}{a}}$$

Para calcular la diferencia de raíces usar

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1 x_2$$

3) PARA RECONSTRUIR UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA A PARTIR DE SUS RAÍCES

x^2 – (SUMA DE RAÍCES)X + PRODUCTO DE RAÍCES = 0

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

ya que x_1 , x_2 son raíces, entonces la ecuación será

$$\boxed{a(x - x_1)(x - x_2) = 0} \quad \wedge \quad a \neq 0$$

4) CUANDO SUS RAÍCES SON RECÍPROCAS

$$\boxed{x_1 \, x_2 = 1}$$

5) CUANDO SUS RAÍCES SON SIMÉTRICAS

$$\boxed{x_1 + x_2 = 0}$$

CUADRADOS PERFECTOS

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, \ldots\ldots 11^2, 12^2$

PRÁCTICA DIRIGIDA

1) Resolver: $x^2 + 3x - 40 = 0$.

Indicar su conjunto solución.

Resolución:

$ax^2 + bx + c = 0$

$1x^2 + 3x + (-40) = 0$

$a = 1, \quad b = 3, \quad c = -40$

Cálculo del discriminante

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 3^2 - 4(1)(-40)$

$\Delta = 9 - (-160)$

$\Delta = 169 = 13^2$

(Como el discriminante es un cuadrado perfecto, por consiguiente el problema, se puede resolver por aspa simple)

$1x^2 \quad + \quad 3x \quad - \quad 40 = 0$

$x \qquad + 8 \qquad\qquad + 8x$

$x \qquad - 5 \qquad\qquad - 5x$

$\qquad\qquad\qquad\qquad + 3x$

$(x + 8)(x - 5) = 0$

$x + 8 = 0 \quad$ ó $\quad x - 5 = 0$

$x = 0 - 8 \quad$ ó $\quad x = 0 + 5$

$x_1 = -8 \qquad x_2 = +5$

2) Resolver: $5x^2 + 3x - 1 = 0$.
Indicar su conjunto solución.

Resolución:

$ax^2 + bx + c = 0$

$5x^2 + 3x + (-1) = 0$

$a = 5, \quad b = 3, \quad c = -1$

Cálculo del discriminante

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 3^2 - 4(5)(-1)$

$\Delta = 9 - (-20) = 29$

(como el discriminante no es cuadrado perfecto, por consiguiente no se puede resolver por aspa simple. Entonces se resuelve aplicando la fórmula general)

$$x_{(1,2)} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a = 5, \quad b = 3, \quad c = -1$

$$x_{(1,2)} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(5)(-1)}}{2(5)}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2(5)}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{10}$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{29}}{10} \qquad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{29}}{10}$$

3) Hallar "m" si las raíces de la ecuación:

$x^2-(m+7)x+25=0 \;\; ; \;\; m>0$ **, son iguales.**

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Resolución

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{(1,2)} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Si: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm 0}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b+0}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-0}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b}{2a}$$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 2 raíces reales iguales
(una única solución)

CÁLCULO DE m

$ax^2 + bx + c = 0$

$x^2-(m+7)x+25=0 \;\; ; \;\; m>0$

$1x^2 + (-(m+7))\,x + 25 = 0$

$a = 1, \;\; b = -(m+7), \;\; c = 25$

$\Delta = 0$

$b^2 - 4ac = 0$

$(-(m+7))^2 - 4(1)(25) = 0$

$(m+7)^2 - 100 = 0$

$(m+7)^2 = 100$

$(m+7)^2 = (\pm 10)^2$

$m + 7 = +10$ $\quad$ m = 3 (Respuesta)

$m + 7 = -10$ $\quad$ m = - 17 (se descarta ya que m > 0)

4) Formar la ecuación de 2do grado sabiendo que sus raíces son: $x_1 = 4$; $x_2 = -3$

a) $x^2 - x + 12 = 0$ b) $x^2 - 12x + 1 = 0$
c) $x^2 + 12x + 1 = 0$ d) $x^2 + x - 12 = 0$
e) $x^2 - x - 12 = 0$

Resolución

PARA RECONSTRUIR UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA A PARTIR DE SUS RAÍCES

x^2 – (SUMA DE RAÍCES)X + PRODUCTO DE RAÍCES = 0

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$

Reemplazando: $x_1 = 4$; $x_2 = -3$

$x^2 - (4 + (-3))x + 4(-3) = 0$

$x^2 - (4 - 3)x + (4)(-3) = 0$

$x^2 - (1)x + (-12) = 0$

$x^2 - x - 12 = 0$

5) Formar la ecuación de 2do grado sabiendo que sus raíces son: $x_1 = -2$; $x_2 = 7$

Resolución

PARA RECONSTRUIR UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA A PARTIR DE SUS RAÍCES

x^2 – (SUMA DE RAÍCES)X + PRODUCTO DE RAÍCES = 0

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$

Reemplazando: $x_1 = -2$; $x_2 = 7$

$x^2 - ((-2) + 7)x + (-2)7 = 0$

$$x^2 - (5)x + (-14) = 0$$

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

6) Formar la ecuación de 2do grado sabiendo que sus raíces son: $x_1 = +4$; $x_2 = -11$

Resolución

PARA RECONSTRUIR UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA A PARTIR DE SUS RAÍCES

x^2 – (SUMA DE RAÍCES)**X** + PRODUCTO DE RAÍCES = 0

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

Reemplazando: $x_1 = +4$; $x_2 = -11$

$$x^2 - ((+4) + (-11))x + (+4)(-11) = 0$$

$$x^2 - (4 - 11)x + (-44) = 0$$

$$x^2 + 7x - 44 = 0$$