

Preliminaires

1. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si elle est égale à sa transposée :

$$A = {}^t A \text{ soit } \forall (i, j) \in [1, n]^2, a_{ij} = a_{ji}.$$

2. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si elle vérifie ${}^t A A = I$ soit $A^{-1} = {}^t A$.
-

3. Soient p, q, m, n des entiers naturels strictement positifs.

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in M_{p,q}(\mathbb{R}) \text{ et } B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

Soient

- (a) Le produit AB est possible à condition que $q = m$.
-

$$AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$$

- (b) La matrice AB a alors p lignes et n colonnes.
-

- (c) Expression du coefficient c_{ij} .
- $$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$
-

Partie I

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

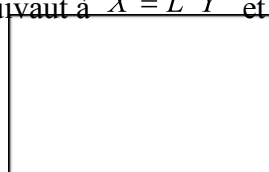
Soient les deux matrices :

1. $\det(L) = 1$ et $\det(A) = 2(6 - 3) + (2 - 2) = 6$.
-

2. $\det(L)$ et $\det(A)$ étant non nuls, A et L sont inversibles.

Calcul de l'inverse de L .

Pour cela, on considère la relation matricielle $LX = Y$ qui équivaut à $X = L^{-1}Y$ et qui se traduit par :



$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + y_2 \\ x_3 = -y_2 + y_3 \end{cases} \quad L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

3. Matrice U triangulaire supérieure telle que $A = LU$.

Il existe une unique matrice U vérifiant $A = LU$, c'est $U = L^{-1}A$, nous constaterons qu'elle est bien triangulaire supérieure.

$$L^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Conclusion : } U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie II

1. $L = (l_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(\mathbb{R})$ est triangulaire inférieure si : $\forall (i, j) \in [1, n]^2, j > i \Rightarrow l_{ij} = 0$.
- $U = (u_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure si : $\forall (i, j) \in [1, n]^2, j < i \Rightarrow u_{ij} = 0$.

2. Soit donc $A = LU$ avec U triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure.

On a pour $1 \leq i, j \leq n, a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} u_{kj} = \sum_{k=1}^{\min(i, j)} l_{ik} u_{kj}$ car pour $k > \min(i, j)$ l'un des deux termes l_{ik} ou u_{kj} est nul.

Conclusion : $1 \leq i, j \leq n, a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i, j)} l_{ik} u_{kj}$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = (1-4) - 2(2-4) + 2(4-2) = 5 \neq 0$. A est inversible.

4. Soient à résoudre $A = LU$ avec :

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

(a) $a_{11} = l_{11}u_{11}$ se traduit par : $u_{11} = 1$.

(b) $\begin{cases} a_{21} = l_{21}u_{11} \\ a_{31} = l_{31}u_{11} \end{cases}$ se traduit par : $\begin{cases} l_{21} = 2 \\ l_{31} = 2 \end{cases}$.

(c) $a_{12} = l_{11}u_{12}$ se traduit par : $u_{12} = 2$.

(d) $a_{22} = l_{21}u_{12} + l_{22}u_{22}$ se traduit par : $1 = 2 \times 2 + u_{22}$ soit $u_{22} = -3$.

(e) $a_{32} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22}$ se traduit par : $2 = 2 \times 2 - 3l_{32}$ soit $l_{32} = \frac{2}{3}$.

(f) $\begin{cases} a_{13} = l_{11}u_{13} \\ a_{23} = l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ a_{33} = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33}u_{33} \end{cases}$ se traduit par : $\begin{cases} u_{13} = 2 \\ 2 = 2 \times 2 + u_{23} \text{ soit } u_{23} = -2 \\ 1 = 2 \times 2 + \frac{2}{3}(-2) + u_{33} \text{ soit } u_{33} = -3 + \frac{4}{3} = -\frac{5}{3} \end{cases}$.

Conclusion :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \text{ et vérification } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Calcul de U^{-1} et L^{-1} .

On utilise la méthode indiquée au I2

Pour U^{-1} :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = y_1 \\ -3x_2 - 2x_3 = y_2 \\ -\frac{5}{3}x_3 = y_3 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{4}{5}y_3 + \frac{6}{5}y_3 = y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{5}y_3 \\ x_2 = -\frac{1}{3}\left(y_2 - \frac{6}{5}y_3\right) = -\frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{5}y_3 \\ x_3 = -\frac{3}{5}y_3 \end{cases}$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\text{Pour } L^{-1} : \begin{cases} x_1 = y_1 \\ 2x_1 + x_2 = y_2 \\ 2x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -2y_1 + y_2 \\ x_3 = -2y_1 - \frac{2}{3}(-2y_1 + y_2) + y_3 = -\frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + y_3 \end{cases}.$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. Solution de

$$x = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (LU)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = U^{-1} L^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \text{ soit :}$$

On a :

$$x = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vérification :

cqfd.

Partie III

Soit $\| \cdot \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ soit $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ lorsque $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Pour $B \in M_n(\mathbb{R})$ on pose $\|B\| = \sup_{\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$.

1. De manière évidente $|||I||| = 1$.

2. Pour $x = 0$, on a : $\|Bx\| = \|0\| = 0$ et $|||B||| \|x\| = 0$ donc l'inégalité est bien vérifiée.

Pour $x \neq 0$, on a : $|||B||| = \sup_{\{y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}} \frac{\|By\|}{\|y\|} \geq \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$, soit sous une autre forme $\|Bx\| \leq |||B||| \|x\|$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Bx\| \leq \alpha \|x\|$.

En particulier pour $x \neq 0$, $\frac{\|Bx\|}{\|x\|} \leq \alpha$ et donc $\sup_{\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \leq \alpha$, autrement dit : $|||B||| \leq \alpha$.

4. Soient B_1 et B_2 appartenant à $M_n(\mathbb{R})$. Montrons que : $|||B_1 B_2||| \leq |||B_1||| |||B_2|||$.

En effet : $|||B_1 B_2||| = \sup_{\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}} \frac{\|B_1 B_2 x\|}{\|x\|}$. Or si x est tel que $B_2 x = 0$ alors $\|B_1 B_2 x\| = 0$ et donc un tel x n'intervient pas dans la recherche du sup précédent, de sorte que l'on peut écrire :

$$\sup_{\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}} \frac{\|B_1 B_2 x\|}{\|x\|} = \sup_{\{x \in \mathbb{R}^n ; B_2 x \neq 0\}} \frac{\|B_2 x\|}{\|x\|} \frac{\|B_1(B_2 x)\|}{\|B_2 x\|} \leq \sup_{\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}} \frac{\|B_2 x\|}{\|x\|} \times \sup_{\{y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}} \frac{\|B_1 y\|}{\|y\|} = |||B_2||| |||B_1||| \text{ cqfd.}$$

Conclusion : $|||B_1 B_2||| \leq |||B_1||| |||B_2|||$.

5. Soit B une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifient : $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|$.

(a) Soit e_i le i -ème vecteur de la base canonique. On a : $Be_i = \lambda_i e_i$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ et par suite $Bx = x_1 \lambda_1 e_1 + \dots + x_n \lambda_n e_n$.

On en déduit que : $\|Bx\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2 \lambda_k^2} \leq \sqrt{\lambda_n^2 \sum_{k=1}^n x_k^2} = |\lambda_n| \|x\|$. Conclusion : $|||B||| \leq |\lambda_n|$.

(c) On déduit de ce qui précède (5b et 3) que $|||B||| \leq |\lambda_n|$.

Par ailleurs pour $x = e_n$ on a : $\frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \frac{\|\lambda_n e_n\|}{\|e_n\|} = |\lambda_n|$ et donc finalement : $|||B||| = |\lambda_n|$.

6. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$.

(a) $S = {}^t B B$ est diagonalisable car c'est une matrice réelle symétrique, en effet :

$${}^t S = {}^t ({}^t B B) = {}^t B B = S$$

(b) Soit u un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ .

On a :
$$\begin{cases} u \neq 0 \\ Su = \lambda u \end{cases} \quad \|Bu\|^2 = ({}^t(Bu) Bu) = {}^t u {}^t B B u = {}^t u S u = {}^t u \lambda u = \lambda \|u\|^2$$

$$\lambda = \frac{\|Bu\|^2}{\|u\|^2}$$

On en déduit que ce qui assure que $\lambda \geq 0$. cqfd. On note $\rho({}^t B B)$ la plus grande valeur propre de S .

(c) On sait qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable et qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, constituée de vecteurs propres de S .

Soit P la matrice de passage de la base canonique à cette base de vecteurs propres, on a que P est orthogonale. La formule $D = P^{-1} S P$ s'écrit donc : $D = {}^t P S P$. cqfd.

(d) Notons p_i les vecteurs colonnes de la matrice P .

Le caractère orthogonal de P se traduit par :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad p_i \text{ est normé donc : } {}^t p_i p_i = 1 \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad p_i \text{ est vecteur propre de } S \text{ associé à } \lambda_i, \text{ donc } S p_i = \lambda_i p_i \\ \text{Pour } i \neq j, \quad p_i \text{ et } p_j \text{ sont orthogonaux soit : } \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad i \neq j, \quad {}^t p_i p_j = 0 \end{cases}$$

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i \quad \text{alors} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}, \quad \|Bx\|^2 = ({}^t(Bx) Bx) = {}^t x S x = {}^t x \begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \lambda_n \end{pmatrix} x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2$$

(e) Soit

$$\|Bx\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2}$$

Conclusion :

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i \quad \text{alors} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}, \quad \|Bx\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2}, \quad \text{d'où :}$$

(f) Le calcul précédent permet d'écrire, pour $x \neq 0$,

$$\frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}} \quad \text{d'où} \quad \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \leq \sqrt{\lambda_n} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}} = \sqrt{\lambda_n}.$$

Comme par ailleurs,
$$\frac{\|B p_n\|}{\|p_n\|} = \sqrt{\lambda_n}$$

on déduit que

$$\|B\| \leq \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\rho({}^t B B)}$$

$$\|B\| = \sup_{\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\rho({}^t B B)}$$

7. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$S = {}^t B B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(S - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 4$$

Les valeurs propres de S sont : $\lambda_1 = 3 - \sqrt{5}$ et $\lambda_2 = 3 + \sqrt{5}$.

Conclusion : $\boxed{||| B ||| = \sqrt{3 + \sqrt{5}}}$

FIN