Câu 1. **[2D1-2.10-3] (HSG 12 Bắc Giang)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+px+q}{x^2+1}$, trong đó $p\neq 0,\ p^2+q^2=1$. Có bao nhiêu cặp $(p;q)$ sao cho khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên bằng $\sqrt{10}$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Ngọc Lan; Fb:ngoclan nguyen

Chọn A

$D=\mathbb{R}$.

$$y'=\frac{(2x+p).(x^2+1)-2x.(x^2+px+q)}{(x^2+1)^2}=\frac{-px^2+2.(1-q)x+p}{(x^2+1)^2}.$$

$$y'=0\Leftrightarrow -px^2+2.(1-q)x+p=0\quad (1).$$

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

Do $p\neq 0$ nên $ac=-p^2<0$ $\Rightarrow$ phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có phương trình đường đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $y=1+\dfrac{p}{2x}$.

Gọi 2 nghiệm của phương trình (1) là x_1,x_2.

Khi đó hai điểm cực trị là $A\left(x_1;1+\dfrac{p}{2x_1}\right)$, $B\left(x_2;1+\dfrac{p}{2x_2}\right)$.

Theo bài ra: $AB=\sqrt{10}\Leftrightarrow AB^2=10$ $\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2+\left(\dfrac{p}{2x_1}-\dfrac{p}{2x_2}\right)^2=10$.

$$\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2+\frac{p^2}{4}\left(\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\right)^2=10\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2.\left(1+\frac{p^2}{4x_1^2x_2^2}\right)=10.$$

$$\Leftrightarrow \left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]\left(1+\frac{p^2}{4x_1^2x_2^2}\right)=10\quad (2).$$

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2(1-q)}{p} \\ x_1x_2=-1 \end{cases}$.

Thay vào phương trình (2) ta có

$$\left[4\left(\frac{1-q}{p}\right)^2+4\right]\left[1+\frac{p^2}{4}\right]=10\Leftrightarrow 4\left[\frac{(1-q)^2}{p^2}+1\right]\left(1+\frac{p^2}{4}\right)=10.$$

$\Leftrightarrow 4\left(\frac{(1-q)^2}{1-q^2}+1\right)\left(1+\frac{p^2}{4}\right)=10$ (do $p^2=1-q^2$).

$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1-q}{1+q}+1\right)\left(1+\frac{1-q^2}{4}\right)=10 \Leftrightarrow 4\left(\frac{2}{1+q}\right)\left(\frac{5-q^2}{4}\right)=10$.

$\Leftrightarrow 5-q^2=5(1+q) \Leftrightarrow q^2+5q=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=-5 \\ q=0 \end{array}\right.$.

Với $q=-5 \Rightarrow p^2=-24$ (vô nghiệm).

Với $q=0 \Rightarrow p^2=1 \Leftrightarrow p=\pm 1$.

Vậy có 2 cặp số $(p;q)$ thỏa mãn là $(-1;0);(1;0)$. Chọn A