

CORRIGE DU CONCOURS EIA - Classes Préparatoires ATS-TSI - Session mai 2001

Moteur automobile à allumage commandé

I. THERMODYNAMIQUE DU MOTEUR

I.1. Questions préliminaires

I.1.1. Lors d'une transformation quelconque, la variation d'énergie interne ΔU d'un système thermodynamique est égale à l'énergie qu'il échange avec l'extérieur sous forme de travail W et de chaleur Q : $\Delta U = W + Q$.

I.1.2. Le bilan entropique du système après mise en contact avec les thermostats $\{T_i\}$ s'écrit $\Delta S \geq \sum Q_i/T_i$. Si le système effectue un cycle fermé, $\Delta S = 0$ d'où $\sum Q_i/T_i \leq 0$ (inégalité de Carnot-Clausius).

I.1.3. C'est la loi de Laplace des gaz parfaits des transformations adiabatiques quasistatiques: $P V^\gamma = C^{\text{te}}$, d'où l'on déduit d'après l'équation d'état $PV = nRT$, $T V^{\gamma-1} = C^{\text{te}}$ et $P^{1-\gamma} T^\gamma = C^{\text{te}}$.

I.1.4. Comme $dS = dQ_{\text{rév}}/T$, si la transformation du système est réversible ou quasistatique et adiabatique, il vient $dQ_{\text{rév}} = 0$ donc $S = C^{\text{te}}$, d'où $\Delta S = 0$.

I.2. Cycle moteur ditherme théorique

I.2.1. Pour un cycle moteur, $Q_c > 0$, $Q_f < 0$ et $W < 0$. Le rendement énergétique du moteur est défini par $\eta = -W/Q_c$.

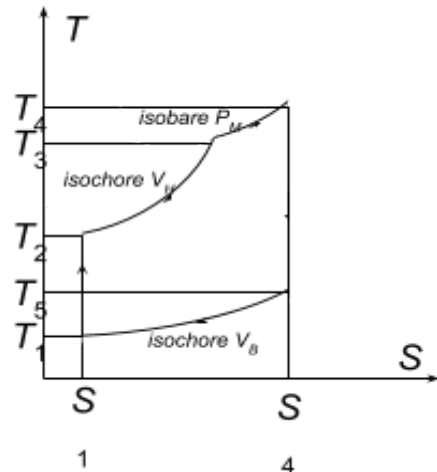
I.2.2. Sur un cycle fermé, $\Delta U = 0$ d'où $W + Q_f + Q_c = 0$ donc $\eta = (Q_f + Q_c)/Q_c$ d'où $\eta = 1 + Q_f/Q_c$.

I.2.3. Comme le Deuxième Principe implique $Q_c/T_c + Q_f/T_f \leq 0$ et que $Q_c > 0$, on en déduit $Q_f/Q_c \leq -T_f/T_c$, d'où l'inégalité: $\eta \leq 1 - T_f/T_c$, rendement maximal théorique si toutes les transformations sont réversibles.

I.3. Modélisation du cycle moteur réel

I.3.1. Comme à V constant $dQ_{\text{rév}} = nC_{vm}dT$, $dS = dQ_{\text{rév}}/T = nC_{vm}dT/T$ d'où $T = A \exp(S/nC_{vm})$: les branches isochores sont donc identiques et d'allure exponentielle, décalées parallèlement à l'axe T , celle de $V = V_H$ étant au-dessus de l'isochore V_B car la température est plus élevée. On peut aussi écrire $dS = n(C_{vm}dT/T + PdV/T)$ d'où l'on déduit $T = T_0(V_0/V)^{\gamma-1} \exp[(S-S_0)(\gamma-1)/nR]$.

I.3.2. De même, à P constante, $dS = nC_{pm}dT/T \Rightarrow T = A \exp(S/nC_{pm})$: la branche isobare a également une allure exponentielle, de pente plus faible que celle des isochores, de sorte qu'elle coupe l'isochore V_H en un point de température T_3 , la température continuant de monter au-delà.



I.3.3. Comme $S = C^{\text{te}}$ lors d'une transformation adiabatique quasistatique, les deux branches correspondantes sont verticales. On peut identifier directement les points et les transformations successives du cycle: {1-2} compression adiabatique; {2-3} échauffement isochore; {3-4} échauffement isobare; {4-5} détente adiabatique; {5-1} refroidissement isochore.

I.3.4. Sur le diagramme $\{T, S\}$, les chaleurs échangées de manière réversible ou quasistatique sont les surfaces comprises entre l'axe $T = 0$ K et les branches correspondantes car $Q = \oint TdS$. Par conséquent, Q_c est l'aire A_1 sous la branche isobare 3-4, et le travail est l'aire A_2 du cycle car $W = -\sum Q_i = \oint TdS$. Le diagramme entropique permet donc de "visualiser" directement le rendement par $\eta \equiv A_2/A_1$.

I.4. Paramétrage du cycle

I.4.1. A volume constant, $Q_{23} = \int_{T_2}^{T_3} n C_{vm} dT$, avec $C_{vm} = R/(\gamma-1)$ d'où $Q_{23} = n \frac{R}{\gamma-1} (T_3 - T_2)$.

A pression constante, $Q_{34} = \int_{T_3}^{T_4} n C_{pm} dT$, avec $C_{pm} = \gamma R/(\gamma-1)$ d'où $Q_{34} = n \frac{\gamma R}{\gamma-1} (T_4 - T_3)$.

I.4.2. Comme $Q_{12} = 0$ et $Q_{45} = 0$ (transformations adiabatiques), le Premier Principe appliqué au cycle fermé ($\Delta U=0$) s'écrit $W = -(Q_{23} + Q_{34} + Q_{51})$. Or $Q_c = Q_{23} + Q_{34}$ donc $\eta = (Q_{23} + Q_{34} + Q_{51}) / (Q_{23} + Q_{34})$, soit encore

$$\eta = 1 + \frac{Q_{51}}{Q_{23} + Q_{34}}.$$

I.4.3. {5-1} étant isochore, $Q_{51} = n \frac{R}{\gamma-1} (T_1 - T_5)$, d'où $\eta = 1 + \frac{T_1 - T_5}{T_3 - T_2 + \gamma(T_4 - T_3)}$.

I.4.4. {1-2} étant isentropique, $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$, soit $T_2 = T_1 (V_B/V_H)^{\gamma-1}$ donc $T_2 = T_1 a^{\gamma-1}$.
De même, $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$ donc $P_2 = P_1 a^\gamma$.

I.4.5. A volume constant, $P/T = C^e$, donc $P_3/T_3 = P_2/T_2$, d'où $T_3/T_2 = P_3/P_2 = b$ d'où $T_3 = T_1 b a^{\gamma-1}$.
A pression constante, $V/T = C^e$, d'où $T_4/T_3 = V_4/V_H = r$, donc $T_4 = T_1 r b a^{\gamma-1}$.

I.4.6. {4-5} étant isentropique, $T_4 V_4^{\gamma-1} = T_5 V_B^{\gamma-1}$, d'où $T_5 = T_4 (V_4/V_B)^{\gamma-1} = (r/a)^{\gamma-1}$, donc $T_5 = T_1 b r^\gamma$.

I.4.7. $\eta = 1 + \frac{T_1 - T_1 b r^\gamma}{T_1 b a^{\gamma-1} - T_1 a^{\gamma-1} + \gamma(T_1 r b a^{\gamma-1} - T_1 b a^{\gamma-1})}$ donc $\eta = 1 + \frac{1 - b r^\gamma}{(b-1)a^{\gamma-1} + \gamma(r-1)ba^{\gamma-1}}$, soit encore

$$\eta = 1 - \frac{b r^\gamma - 1}{a^{\gamma-1}[(b-1) + \gamma b(r-1)]}.$$

I.4.8. De $P_3 = \alpha P_1$, on obtient $\alpha = b a^\gamma$. De $T_4 = \beta T_1$, on tire $\beta = r b a^{\gamma-1} = r \alpha / a$. Si on s'impose $r = \rho$, on en déduit

$$a = \rho \frac{\alpha}{\beta}, \quad b = \left(\frac{\beta}{\rho} \right)^\gamma \alpha^{1-\gamma}.$$

I.4.9. A.N.: $a = 1,5 \times 54 / 9$ d'où $a = 9$; $b = 54 / 9^{1,4}$ d'où $b = 2,5$;
 $\eta = 1 - (2,5 \times 1,5^{1,4} - 1) / 9^{0,4} [2,5(1,4 \times 0,5 + 1) - 1] = 1 - (2,5 \times 1,8 - 1) / 2,4(2,5 \times 1,7 - 1) = 1 - 3,5 / 2,4 \times 3,25 \rightarrow \eta \approx 0,55$.

I.4.10. $T_4 = 9 \times 300$ d'où $T_4 = 2700$ K. Le rendement de Carnot est $\eta_c = 1 - 300/2700 = 8/9$ soit $\eta_c \approx 0,89$.

II. ASPECTS MÉCANIQUES DU MOTEUR

II.1. Cinématique du piston

II.1.1. La distance (H,Ox) est $B \sin \phi = L \sin \theta$.

II.1.2. La simple lecture du schéma donne $x = L \cos \theta + \sqrt{B^2 - L^2 \sin^2 \theta}$.

II.1.3. $V = V_H + S(L + B - x)$ soit $V = V_H + S \left[L(1 - \cos \theta) + B - \sqrt{B^2 - L^2 \sin^2 \theta} \right]$ d'où $V_B = V_H + 2LS$ et la cylindrée $C = 2LS$.

$$v_P = \dot{x} = -L\dot{\theta} \sin \theta - \frac{L^2 \ddot{\theta} \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{B^2 - L^2 \sin^2 \theta}}$$

II.1.4. La vitesse du piston est

$$v_P = -L\dot{\theta} \sin \theta - \frac{L\ddot{\theta} h \sin 2\theta}{2\sqrt{1-h^2 \sin^2 \theta}} ; \text{ comme } h^2 \ll 1, \quad v_P \approx -L\dot{\theta} \sin \theta - \frac{hL\ddot{\theta}}{2} \sin 2\theta$$

II.1.5. Avec $h = L/B$:

II.1.6. La vitesse angulaire étant constante, $\gamma_P \approx -L\omega^2 (\cos \theta + h \cos 2\theta)$.

II.2. Modèle dynamique du système {piston - bielle - vilebrequin}

II.2.1. D'après le Théorème de la Résultante Cinétique appliqué au piston dans le référentiel du moteur supposé

galiléen, $M\gamma_P = F + R_{B/P} + R_{C/P}$. Par projection sur Ox, $M\gamma_P = -(P - P_1)S + R_{B/P} \cos \varphi$, d'où le module de

$$R_{B/P} = \frac{M\gamma_P + (P - P_1)S}{\cos \varphi}$$

la réaction de la bielle sur le piston

II.2.2. D'après le Théorème des actions mutuelles appliqué successivement à l'ensemble {bielle, piston}, puis à

l'ensemble {bielle, vilebrequin}: $R_{B/P} = -R_{P/B}$ et $R_{B/V} = -R_{V/B}$.

D'autre part, la masse de la bielle étant négligée (ou reportée en partie sur le piston et le vilebrequin, ce qui revient au même qualitativement), la résultante des forces sur la bielle est nulle: $R_{V/B} + R_{P/B} = 0$, d'où l'on déduit $R_{B/V} = -R_{B/P}$.

II.2.3. Le moment algébrique de la réaction de la bielle sur le vilebrequin par rapport à Oz est

$$M(R_{B/V}) = R_{B/V} L \sin(\angle R_{B/V}, HO) = R_{B/V} L \sin(\theta + \phi) = \frac{M\gamma_P + (P - P_1)S}{\cos \varphi} L (\sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta)$$

la question II.1.1, $\sin \phi = h \sin \theta$, d'où $M_{R_{B/V}} \approx L((P - P_1)S - ML\omega^2 (\cos \theta + h \cos 2\theta))(\sin \theta + h \sin 2\theta)$. D'après

II.2.4. La puissance mécanique fournie par l'ensemble des quatre pistons est $P_m = 4 \Gamma_m \omega$.

A.N.: $P_m = 4 \times 41,6 \times 3000 / 60 \times 2 \times \pi$ soit $P_m \approx 52000$ W.

III. ÉTUDE DE L'ALLUMAGE

III.1. Modélisation de la décharge électrique

III.1.1. $N = nN_A/V = P_c N_A RT$ où $P_c = XP$ où est la pression partielle du carburant gazeux et $k = R/N_A$ est la constante de Boltzmann.

On en déduit $N = XP/kT$. Si d est la distance moyenne entre molécule, il y a $N = 1/d^3$ molécules par m^3 , d'où $d = (kT/XP)^{1/3}$.

III.1.2. Entre deux chocs ionisants, l'électron acquiert une énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2 = e\Delta V \approx W_i$ d'où $\Delta V \approx W_i/e$.

Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, $E_i = \Delta V/l$ d'où $E_i \approx W_i/100ed$.

III.1.3. A.N.: $d = [1,4 \cdot 10^{-23} \times 2700 / (0,014 \times 54 \cdot 10^5)]^{1/3} = (10^{-24}/2)^{1/3} = 10^{-8}/2^{1/3}$ soit $d \approx 10^{-8}$ m
 $E_i \approx 10^6 / (6 \cdot 10^{23} \times 100 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 10^{-8})$ soit $E_i \approx 10^7$ V/m.

III.1.4. $U_i = E_i d$ d'où $U_i = 3,4 \cdot 10^7 \times 0,7 \cdot 10^{-3}$ soit $U_i \approx 24000$ V.

III.2. Dimensionnement de l'allumage électronique

III.2.1. L'énergie magnétique emmagasinée dans l'enroulement primaire est $W_m = \frac{1}{2} L_p I_{pm}^2$ d'où $I_{pm} = (2W_m/L_p)^{1/2}$.

III.2.2.a. La loi de la maille primaire orientée dans le sens algébrique de I_p s'écrit $E_0 + e_p - R_p I_p = 0$ avec

$$e_p = -L_p \frac{dI_p}{dt} \quad (\text{force électromotrice induite dans l'enroulement primaire}), \text{ d'où } L_p \frac{dI_p}{dt} + R_p I_p = E_0$$

III.2.2.b. La solution générale de l'équation sans second membre s'écrit $I_{p1} = A \exp(-R_p t/L_p)$ et une solution particulière de l'équation avec second membre est $I_{p2} = E_0/R_p$, d'où la solution générale de l'équation:

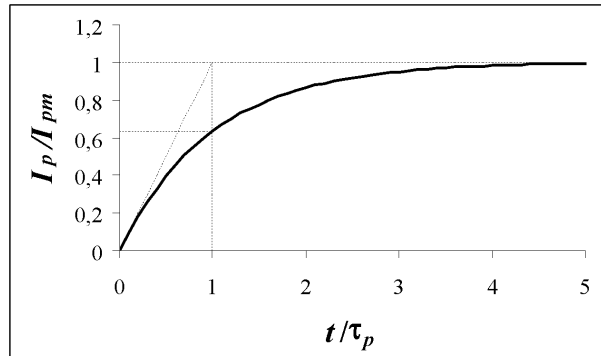
$$I_p(t) = E_0/R_p + A \exp(-R_p t/L_p).$$

Comme $I_p(0) = 0 = E_0/R_p + A$, on obtient

$$I_p = \frac{E_0}{R_p} \left(1 - e^{-t/\tau_p} \right) \quad \text{avec } I_{pm} = E_0/R_p$$

lorsque $t \rightarrow \infty$.

III.2.2.c. Lorsque $t > 5\tau_p \Rightarrow e^{-t/\tau_p} < 0,01$ d'où $I_p \approx I_{pm}$. Le graphe $I_p(t)$ est celui de la réponse d'un système du premier ordre.



III.2.3. Chaque cycle moteur s'effectue en 2 allers-retours du piston entre le PMH et le PMB, ce qui correspond à une étincelle pour deux tours de vilebrequin par cylindre, donc 4 étincelles pour les quatre cylindres, d'où $n = 2$ étincelles par tour de vilebrequin. La période des étincelles est $T_m = 60/nf$ soit $T_m = 0,0066s$.

$$\text{Si } T_m = 5L_p/R_p \text{ et } L_p = 2W_m R_p^2/E_0^2, \quad L_p = \frac{E_0^2 T_m^2}{50W_m} \quad R_p = \frac{E_0^2 T_m}{10W_m}, \text{ soit } L_p = 3,2 \text{ mH}, R_p = 2,4 \Omega, I_{pm} = 5A.$$

III.2.4.a. La f.e.m. induite au primaire est $e_p = -L_p \frac{dI_p}{dt}$. A l'ouverture du circuit, la tension aux bornes de

$$\text{l'enroulement primaire est donc } U_p = R_p I_p + L_p \frac{dI_p}{dt}, \text{ d'où } \bar{U}_p = R_p I_{pm} - L_p \frac{I_{pm}}{t_{OFF}}, \text{ soit } \bar{U}_p \approx -L_p \frac{I_{pm}}{t_{OFF}}.$$

III.2.4.b. Le couplage du secondaire implique $U_s \approx M \frac{dI_p}{dt} = \frac{M}{L_p} e_p \approx \frac{M}{L_p} U_p$ avec $\bar{U}_s = U_i$ d'où la valeur de

$$M \approx L_p \frac{U_i}{\bar{U}_p}. \quad \text{En considérant le secondaire en court-circuit durant la surtension, la}$$

conservation de l'excitation magnétique s'écrit $H = N_p I_{pm} = N_s I_{sm}$, avec $\frac{M}{L_p} \approx \frac{e_s}{e_p} \approx \frac{N_s}{N_p} = m$ et

$$L_s = \frac{M^2}{L_p} = m^2 L_p \quad \text{si le couplage est parfait.}$$

$$\text{A.N.: } \bar{U}_p = 3,2 \cdot 10^{-3} \times 12 / (2,4 \times 50 \cdot 10^{-6}) = 320 \text{ V} \Rightarrow M = 3,2 \cdot 10^{-3} \times 24000 / 320 \text{ d'où } M = 0,24 \text{ H};$$

$$m = 0,24 / 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ d'où } m = 75; L_s = 75^2 \times 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ d'où } L_s \approx 18 \text{ H et } I_{sm} = I_{pm}/m, \text{ soit } I_{sm} = 0,066 \text{ A.}$$

III.2.5.a. Lorsque l'arc électrique commence à se former, l'enroulement secondaire est refermé sur le court-circuit de l'arc et le courant primaire a disparu, d'où

$$-L_s \frac{dI_s}{dt} - R_s I_s + U_c = 0, \quad \text{avec } U_c = Q_s/C_d \text{ d'où } -L_s \frac{dI_s}{dt} - R_s I_s - \frac{1}{C_d} \int I_s dt = 0$$

$$L_s \ddot{I}_s + R_s \dot{I}_s + \frac{1}{C_d} I_s = 0$$

On en déduit , d'équation caractéristique $L_s r^2 + R_s r + 1/C_d = 0$.

$$r = -\frac{R_s}{2L_s} \pm i \sqrt{\frac{1}{L_s C_d} - \frac{R_s^2}{4L_s^2}} \approx -\frac{R_s}{2L_s} \pm i \sqrt{\frac{1}{L_s C_d}}$$

Comme $R_s^2 - 4L_s/C_s < 0$, les racines sont

$$I_s \approx I_{sm} e^{-\frac{R_s}{2L_s} t} \cos \omega_s t, \text{ avec } \omega_s = 1/\sqrt{L_s C_d}. \text{ Ce courant s'annule à } t = \frac{\pi}{2} \sqrt{L_s C_d} \approx 66 \mu s \approx t_{OFF}.$$

III.2.5.b. La tension U_c étant en fait rapidement négligeable, le circuit secondaire $\{L_s, C_s\}$ joue le rôle de générateur pour l'arc électrique, d'où l'équation différentielle:

$$-L_s \frac{dI_s}{dt} - R_s I_s \approx U_a(I_s)$$

. La constante de temps de l'enroulement secondaire $\tau_s = L_s/R_s$ doit être de l'ordre de $10 t_a$, donc $R_s = L_s/10t_a$, soit $R_s = 4000 \Omega$.

III.2.5.c. Par intégration, $\frac{1}{T} \int_0^{t_a} L_s dI_s + \frac{1}{T} \int_0^{t_a} R_s I_s dt = -\frac{1}{T} \int_0^{t_a} U_a dt$, d'où $\frac{L_s}{t_a} (I_a(t_a) - I_{sm}) + R_s \bar{I}_a = -\bar{U}_a$.

Comme le courant I_a reste quasi-constant durant la longue phase finale avant extinction de l'arc, on en

$$\bar{I}_a \approx \frac{\frac{L_s I_{sm}}{t_a} - \bar{U}_a}{R_s + \frac{L_s}{t_a}} \quad \bar{I}_a \approx \frac{\frac{18 \times 0,066}{450 \cdot 10^{-6}} - 400}{4000 + \frac{18}{450 \cdot 10^{-6}}} \quad \text{soit } \bar{I}_a = 0,051 A$$

déduit $I_a(t_a) \approx \bar{I}_a$ donc . On obtient

III.2.5.d. L'énergie moyenne de l'arc est $W_a \approx \bar{U}_a \bar{I}_a t_a$, soit $W_a \approx 9,3 \text{ mJ}$.

L'énergie dissipée par effet Joule dans l'enroulement secondaire est $W_j = \frac{1}{2} R_s \bar{I}_a^2 t_a$, soit $W_a \approx 2,4 \text{ mJ}$.

La différence $W_m - W_a - W_j$ représente:

- les pertes d'énergie par effet Joule dans l'enroulement primaire et le transistor de commutation pendant la disparition de I_p ;
- les pertes d'énergie magnétique dans la bobine par hystérésis
- les pertes par rayonnement, convection et conduction thermique dans le plasma de l'arc.