

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

Curso: 2023-2024

Asignatura: MATEMÁTICAS II



Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x + (a^2 + a)z = 0 \\ x + (2a - 1)y + (a + 1)z = a(2a - 1)y + (a + 1)z = 0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2 + a \\ 1 & 2a - 1 & a + 1 \end{pmatrix}$,
 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2 + a & 0 \\ 1 & 2a - 1 & a + 1 & a \end{pmatrix}$

$$\det A = (2a - 1)(a + 1) - (2a - 1)a(a + 1) = (2a - 1)a(a + 1) \Leftrightarrow a = 0, a = -1, a = \frac{1}{2}$$

– Si $a \neq 0, a \neq -1, a \neq \frac{1}{2}$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

Lo resolvemos por el método de Gauss: La matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2 + a & 0 \\ 1 & 2a - 1 & a + 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{f2 - f1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2 + a & 0 \\ 0 & 2a - 1 & 1 - a & a \end{pmatrix}$$

, que corresponde al sistema $\begin{cases} x + (a^2 + a)z = 0 \\ (2a - 1)y + (1 - a)z = a \end{cases}$

$$\text{Despejando, } z = \frac{a}{-a^2 - a} \Rightarrow z = \frac{-1}{a + 1}$$

$$x = -(a^2 + a)\frac{-1}{a + 1} = a(a + 1)\frac{-1}{a + 1} \Rightarrow x = -a; \quad (2a - 1)y + (1 - a^2)\frac{-1}{a + 1} = a$$

$$(2a - 1)y + (1 - a^2)\frac{-1}{a + 1} = a \Rightarrow (2a - 1)y + a - 1 = a \Rightarrow y = \frac{1}{2a - 1}$$

$$\text{La solución única es } x = -a, y = \frac{1}{2a - 1}, z = \frac{-1}{a + 1}$$

– Si $a = 0$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f2 - f1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f3 = f2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ que corresponde al sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$y = z$. Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = 0, y = k, z = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$.

– Si $a = -1$,

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f2 - f1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f3 - f2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La 3ª fila corresponde a la ecuación $0 = 1$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible.

- Si $a = \frac{1}{2}$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Como $\left| 1 \ \frac{3}{4} \ 1 \ \frac{3}{2} \right| = \frac{3}{4} \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f1.4 & f2.2 & f3.2 & (4 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0) \end{matrix} \begin{matrix} f1 - f2 & f2 - f3 & (2 & 0 & 0 & 0) \end{matrix}$$

La 2ª fila corresponde a la ecuación $0 = 1$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible.

P2) Sean A, P y Q tres matrices cuadradas regulares tales que $QAP = I$, donde I es la matriz identidad de la misma dimensión.

a) Demuestra que $APQA = Q^{-1}P^{-1}$. (1,5 puntos)

Resolución

Multiplicando la ecuación por Q, por la izquierda y por P por la derecha, queda la ecuación equivalente:

$$QAPQAP = QQ^{-1}P^{-1}P \Rightarrow QAPQAP = II = I. \text{ Como } QAP = I \Rightarrow II = I \Rightarrow I = I, \text{ cosa que es evidente}$$

b) Calcula la matriz A para el caso en que P y Q sean las siguientes: $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (1 punto)

Resolución

Como P y Q son matrices cuadradas de orden 2, para que tenga sentido QAP debe ser A cuadrada de orden 2, $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$

$$QAP = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & a + 2c & b + 2d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2b - a & a - b - a - 2c + 2b + 4d & a + 2c - b - 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Igualando,} \\ \{ 2b - a = 1 \ a - b = 0 \rightarrow a = b \ -a - 2c + 2b + 4d = 0 \ a + 2c - b - 2d = 1$$

$$\{ 2b - b = 1 \rightarrow b = 1 \ = a \ -b - 2c + 2b + 4d = 0 \rightarrow b - 2c + 4d = 0 \ b + 2c - b - 2d = 1 \Rightarrow \{ 2c - 4d = 1$$

. Restando, $2d = 0$, $d = 0$; $2c = 1$, $c = \frac{1}{2}$

Conclusión: debe ser $a = b = 1$, $c = \frac{1}{2}$, $d = 0$ y queda la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

P3) Se consideran el plano $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$, la recta $r: \begin{cases} x + 2z + 3 = 0 \\ -x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$ y los

puntos A (3, 2, -1) y B (1, 1, -1). Sea C la intersección entre la recta y el plano.

a) Demuestra que los puntos A, B y C no están alineados. (1,25 puntos)

Resolución

Hallamos C resolviendo el sistema formado por las ecuaciones del plano y la recta,

$$\begin{cases} x + 2z = -3 \\ -x - y + z = -4 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases}$$

Usamos Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & -1 & -1 & 1 & -4 & 2 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} f2 + f1 \\ f3 - 2f1 \end{matrix} \begin{matrix} f1 & f2 & f3 & -2f1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 & -1 & 3 & -7 & 0 & 1 & -5 & 11 \end{pmatrix}$$

que corresponde al sistema $\begin{cases} x + 2z = -3 \\ -y + 3z = -7 \\ -2z = 4 \end{cases} \rightarrow z = -2 ; -y + 3(-2) = -7 ; y = 1 ; x + 2(-2) = -3 ; x = 1$

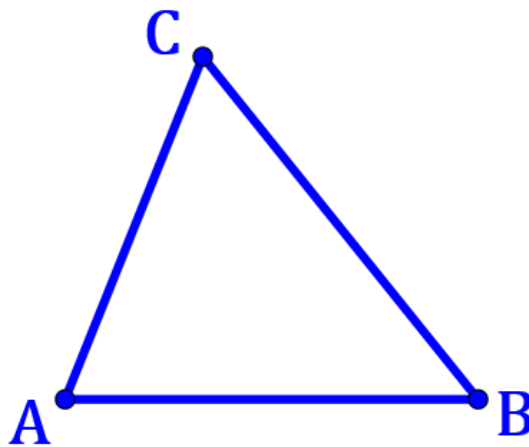
El punto de corte entre el plano y la recta es $C(1, 1, -2)$

$\vec{AB} = (-2, -1, 0) \nparallel \vec{AC} = (-2, -1, -1)$ porque las componentes no son proporcionales.

Por tanto, A, B y C NO están alineados

b) Calcula el área del triángulo que conforman los tres puntos. (1,25 puntos)

Resolución



Sabemos que el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo generado por los vectores

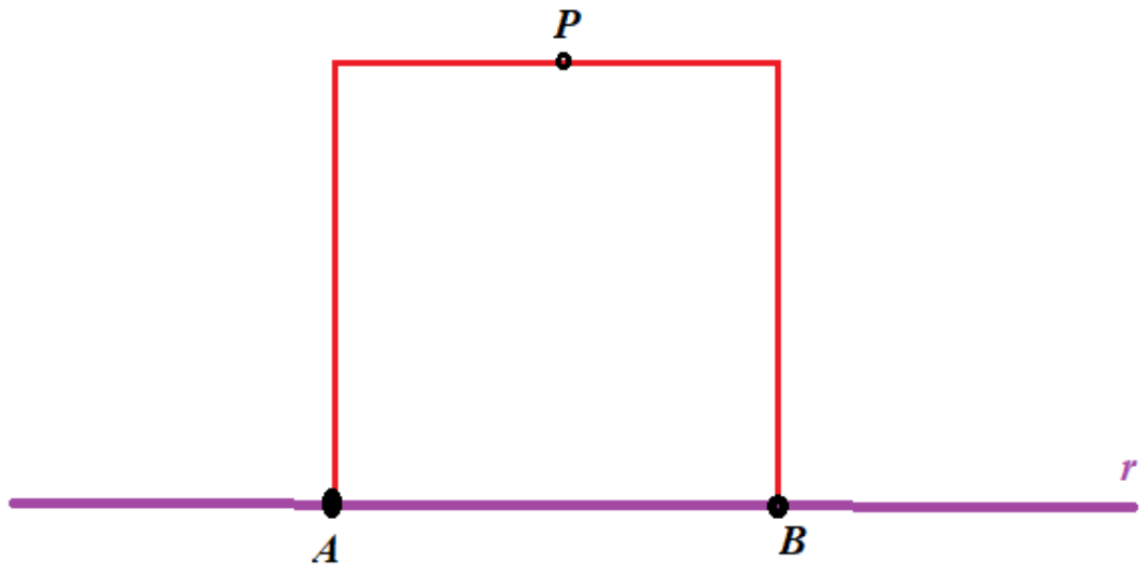
$\vec{AB} = (-2, -1, 0)$ y $\vec{AC} = (-2, -1, -1)$. O sea, $A(\text{triángulo}) = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1, -2, 0)$$

$$A(\text{triángulo}) = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cong 1,12 \text{ u}^2$$

P4) El punto $P(4, 5, 0)$ es el punto medio de un lado de un cuadrado. El lado paralelo al anterior está contenido en la recta de ecuación $r: \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 2x - z - 2 = 0 \end{cases}$. Calcula los dos vértices que determinan este segundo lado. (2,5 puntos)

Resolución



Nos piden hallar A y B

Como r está dada como intersección de dos planos su vector director se puede obtener como el producto vectorial de los vectores normales de los planos:

$\vec{d} = (2, 2, 1) \times (2, 0, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 4, -4) // (1, -2, 2)$. Hallemos un punto, C, de r :

para $x = 0$, $\{2y + z = 0 \quad -z - 2 = 0 \quad z = -2; \quad 2y - 2 = 0, y = 1\}$. Luego, $C(0, 1, -2) \in r$,

$r: \{x = k \quad y = 1 - 2k \quad z = -2 + 2k\}$

Los puntos A y B están en r , $A(t, 1 - 2t, -2 + 2t)$, $B(x, y, z)$

El plano π que pasa por P y es perpendicular a r corta a r en el punto medio, M, de AB. Hallémoslo

Un vector normal de π es $\vec{n} = \vec{d} = (1, -2, 2)$.

Como π pasa por $P(4, 5, 0) \Rightarrow \pi: 1(x - 4) - 2(y - 5) + 2(z - 0) = 0$, de donde $\pi: x - 2y + 2z + 6 = 0$

Hallemos $M = \pi \cap r$: $k - 2(1 - 2k) + 2(-2 + 2k) + 6 = 0$, $9k = 0$, $k = 0$ y $M(0, 1, -2)$

Lado del cuadrado $|\vec{MP}| = |(4, 4, 2)| = \sqrt{36} = 6$

Como M es el punto medio de AB, entonces $3 = |\vec{MA}| = |(t, -2t, 2t)| = \sqrt{9t^2} = 3t \Rightarrow t = 1$, $A(1, -1, 0)$

$\vec{AB} = 2\vec{AM} \Rightarrow (x - 1, y + 1, z) = 2(-1, 2, -2)$. Igualando, $x = -1, y = 3, z = -4$; $B(-1, 3, -4)$

Conclusión: $A(1, -1, 0)$ y $B(-1, 3, -4)$

P5) Calcula los siguientes límites:

a) $\frac{(\ln \ln x)^2}{\sqrt{x}}$ (1,25 puntos)

Resolución

$$\frac{(\ln \ln x)^2}{\sqrt{x}} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ Indeterminación}$$

L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[(\ln \ln x)^2]'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2 \ln \ln x}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln x}{\frac{x}{2\sqrt{x}}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln x}{\sqrt{x}} = \frac{+\infty}{+\infty}$
 Indeterminación

Otra vez L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \ln x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\frac{x}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

Por tanto, aplicando la regla de L'Hôpital $\frac{(\ln \ln x)^2}{\sqrt{x}} = 0$

b) $x^{\frac{2x}{x-1}}$ (1,25 puntos)

Resolución

$$x^{\frac{2x}{x-1}} = 1^{\frac{2 \cdot 1}{1-1}} = 1^{\pm\infty} \text{ Indeterminación.}$$

Sea $L = x^{\frac{2x}{x-1}} \Rightarrow \ln \ln L = \ln \ln \left(x^{\frac{2x}{x-1}} \right) = \ln \ln \left(x^{\frac{2x}{x-1}} \right) = \frac{2x \ln \ln x}{x-1} = \frac{2 \cdot 1 \ln \ln 1}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ Indeterm.}$

L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x \ln \ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln \ln x + \frac{2x}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2(\ln \ln x + 1) = 2(\ln \ln 1 + 1) = 2$

Por tanto, aplicando la regla de L'Hôpital $\ln \ln L = 2 \Rightarrow x^{\frac{2x}{x-1}} = e^2$

P6) Se considera la función $f(x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x)$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, 1]$. (0,5 puntos)

Resolución f es continua en $\mathbb{R}$ por ser suma de funciones continuas. En particular, es continua en $[0, 1]$

b) Halla sus extremos relativos y absolutos en ese mismo intervalo. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (2 puntos)

Resolución

Como f es continua en $[0, 1]$, por el teorema de Weierstrass tiene máximo y mínimo absolutos.

f es derivable en $(0, 1)$ y $f'(x) = -\pi \sin(\pi x) + \pi \cos(\pi x) = \pi[\cos(\pi x) - \sin(\pi x)] = 0 \Leftrightarrow \cos(\pi x) - \sin(\pi x)$

Como $0 < x < 1$, entonces $0 < \pi x < \pi$. Luego, $\pi x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

$$f''(x) = \pi[-\pi \sin(\pi x) - \pi \cos(\pi x)] = -\pi^2[\sin(\pi x) + \cos(\pi x)]; f''\left(\frac{1}{4}\right) = -\pi^2\left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}\right) < 0$$

máximo relativo: $x = \frac{1}{4}, y = f\left(\frac{1}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$; punto $\left(\frac{1}{4}, \sqrt{2}\right)$. No hay mínimo relat.

Valoramos f en los extremos del intervalo $[0, 1]$ para encontrar los extremos absolutos:

$$f(0) = \cos 0 + \sin 0 = 1, \text{ punto } (0, 1) \quad ; \quad f(1) = \cos \pi + \sin \pi = -1, \text{ punto } (1, -1)$$

Por tanto, f tiene un máximo absoluto en $\left(\frac{1}{4}, \sqrt{2}\right)$ y un mínimo absoluto en $(1, -1)$

P7) Se considera la función $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 3}$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1, 3]$ y derivable en $(-1, 3)$. (1,25 puntos)

Resolución

$$2x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{-20}}{4} \text{ (imposible)} \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} \text{ y } f \text{ es continua y derivable en } \mathbb{R}, \text{ en particular es continua en } [-1, 3] \text{ y derivable en } (-1, 3)$$

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (-1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1,25 puntos)

Resolución

Vamos a usar el teorema del valor medio de Lagrange que dice: Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b) , existe al menos un punto $c \in (a, b)$

tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. O sea $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$. La función dada cumple las hipótesis en el

intervalo $[-1, 3]$ pues es continua en $[-1, 3]$ y derivable en $(-1, 3)$;

$$f(-1) = \sqrt{2(-1)^2 + 2(-1) + 3} = \sqrt{3}$$

$$f(3) = \sqrt{2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 3} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ . Luego, } \exists \alpha \in (-1, 3) \text{ tal que}$$

$$f'(\alpha) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

P8) Encuentra los dos puntos en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \ln x \text{ y } g(x) = \frac{x-1}{e-1}.$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2,5 puntos)

Resolución

Para los puntos de corte resolvemos el sistema: $\{y = \ln x \text{ y } y = \frac{x-1}{e-1} \Rightarrow \frac{x-1}{e-1} = \ln x$

Para $x = e$, $\frac{e-1}{e-1} = \ln e \Rightarrow 1 = 1$, se cortan ; y para $x = 1$ también: $\frac{1-1}{e-1} = \ln 1 \Rightarrow 0 = 0$

Luego, los puntos de corte que se piden son $(e, 1)$ y $(1, 0)$. Área que piden: $A = \left| \int_1^e [f(x) - g(x)] dx \right|$.

$$\text{Observa que } \int [f(x) - g(x)] dx = \int \ln x dx - \frac{1}{e-1} \int (x - 1) dx$$

Halleemos una primitiva de $\ln x$ usando la integración por partes:

$$\left[u = \ln x \text{ y } \frac{1}{x} dx \text{ dv} = dx \text{ v} = x \right] \Rightarrow x \ln x - \int 1 dx = x(\ln x - 1)$$

Una primitiva de $[f(x) - g(x)]$ es $p(x) = x(\ln \ln x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2(e-1)}$. Por la regla de Barrow,

$$A = |p(e) - p(1)| = \left| \left[e(\ln \ln e - 1) - \frac{(e-1)^2}{2(e-1)} \right] - \left[1(\ln \ln 1 - 1) - \frac{(1-1)^2}{2(e-1)} \right] \right| = \left| 1 + \frac{1-e}{2} \right| = \frac{3-e}{2} \cong 0,14$$